Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
ÚMFT infovonal: 06 40 638 638
nfu@meh.hu • www.nfu.hu

TÁMOP-3.1.4-08/2-2009-0011
„A kompetencia alapú oktatás feltételeinek megteremtése Vas megye közoktatási intézményeiben”

Feladatok a szinusz- és koszinusztétel témaköréhez
11. osztály, középszint

Vasvár, 2010. június

összeállította: Nagy András

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.
Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
ÚMFT Infovonal: 06 40 638 638
nfu@nfu.gov.hu • www.nfu.hu

Feladatok a szinusz- és koszinusztétel témaköréhez – 11. osztály

1) A táblázat egy-egy sora egy-egy háromszög adatait tartalmazza a szokásos jelölésekkel (az oldalak mértéke cm). Számítsd ki a hiányzó adatokat!

	a	b	c	α	β	γ
a)	**14**	**16**			**57°**	
b)			**11**	**31°15’**	**73°**	
c)	**13,4**	**11,7**			**79°**	
d)	**5**	**6**		**23°**		
e)	**9**				**98°**	**50°**

2) Egy háromszög leghosszabb oldala 13 cm és a vele szemközti szög 83°-os. A háromszög legkisebb szöge 26°-os. Határozd meg a háromszög hiányzó oldalainak hosszát!

3) Egy hegyesszögű háromszög egyik szöge 70°-os, a vele szemközti oldal 23,5 cm hosszú. A háromszög egy másik oldalának hossza 10 cm. Mekkora a hiányzó oldal hossza és a szögek nagysága?

4) Egy háromszög egyik szöge 50°-os, a vele szemközti oldal 23,5 cm hosszú. A háromszög egy másik oldalának hossza 27 cm. Mekkora a hiányzó oldal hossza és a szögek nagysága?

5) Egy háromszögben a = 55 mm, b = 7 cm és α = 52°30’. Mekkorák az ismeretlen szögek és a harmadik oldal?

6) Egy háromszög kerülete 20 cm, szögei 40°, 60° és 80°. Mekkorák az oldalai?

7) Egy háromszög két oldalának összege 15 cm és e két oldallal szemközti szögek nagysága 49°és 73°. Mekkorák a háromszög oldalai?

8) Adott a háromszögben a = 3 m, b = 6 m és α = 30°. Határozd meg a háromszög ismeretlen oldalait és szögeit!

9) Szabályos ötszög átlója 8,5 cm. Mekkorák az ötszög oldalai?

10) Egy paralelogramma egyik oldala 13 cm, átlója 20 cm és egyik belső szöge 53°. Mekkora a paralelogramma területe?

11) Egy trapéz hosszabbik alapja 12,48 cm, az egyik szára 7,27 cm. Az ismert szár és a hosszabb alap szöge 43°. Az alapon fekvő másik szög 65°. Mekkorák a trapéz ismeretlen szögei és oldalai?

12) Határozd meg annak az általános négyszögnek az oldalait, melynek BD átlója 20 cm hosszú. Ez az átló a β szöget egy 55°-os és egy 31°-os részre, a δ szöget pedig egy 43°-os

és egy 26°-os részre bontja úgy, hogy az 55°-os és a 43°-os szög az átló azonos oldalán van.

13) Egy torony magasságát kell meghatározni. A torony aljától kiinduló egyenesen, egymástól 50 m távolságra kijelöltünk két pontot. A közelebbi pontból a torony csúcsa 84°-ban látszik, a távolabbi pontból 51°-ban. Milyen magas a torony?

14) A táblázat egy-egy sora egy-egy háromszög adatait tartalmazza a szokásos jelölésekkel (az oldalak mértéke cm). Számítsd ki a hiányzó adatokat!

	a	***b***	***c***	***α***	***β***	***γ***
a)	**2,4**	**5**	**4,2**			
b)		**10**	**11**	**67°**		
c)	**21**	**20**	**29**			
d)		**15**	**11**		**111°**	
e)	**12**		**12**		**60°**	

15) Egy háromszög két oldalának hossza 15 cm és 20 cm, az általuk bezárt szög 42°15’. Mekkora a háromszög harmadik oldala?

16) Egy háromszögben az oldalak hossza $\sqrt{10}$ dm, 4 dm és 5 dm. Mekkorák a háromszög szögei?

17) Egy háromszögben a = 30 cm, b = 4 dm és c = $\sqrt{2500}$ mm. Mekkorák a háromszög szögei?

18) Egy háromszög oldalai 5 cm, 6 cm és 5 cm. Mekkorák a háromszög szögei?

19) Egy háromszög oldalainak hossza 1000 mm, 2000 mm és 3000 mm. Mekkorák a háromszög szögei?

20) Egy háromszögben a:b = 3:4, γ = 78°, c = 12 cm. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai?

21) Egy háromszög területe 37 cm^2. Két oldala 10 cm és 145 mm. Mekkora a háromszög harmadik oldala?

22) Egy paralelogramma oldalainak hossza $\sqrt{20}$ m, $\sqrt{41}$ m és az egyik átló $\sqrt{37}$ m hosszú. Milyen hosszú a másik átló?

23) Egy paralelogramma oldalai 10 cm és 12 cm, az egyik szöge 112°. Mekkora a rövidebb átlója?

24) Egy konvex négyszög oldalainak hossza rendre 5 cm, 55 mm, 8 cm és 0,7 dm, a 8 cm-es és az 55 mm-es oldal szöge 72°. Mekkorák a négyszög ismeretlen szögei?

25) Egy szabályos hatszög oldalának hossza 8 cm. Határozd meg az átlóinak hosszát!

26) Egy háromszög két oldala 9 cm és 12 cm, közbezárt szögük 71°. Milyen hosszú a 9 cm-es oldalhoz tartozó súlyvonal?

27) Egy repülőtérről két repülőgép száll fel azonos időpontban. Az egyik kelet felé repül 750 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, míg a másik délnyugati irányba repül 680 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Milyen távol lesznek egymástól 45 perc múlva?

28) Milyen hosszúak az óra mutatói, ha végpontjaik 1 órakor 3,23 cm-re, 9 órakor 7,2 cm-re vannak egymástól?

29) Egy háromszög két oldala *a* és *b*, az általuk bezárt szög *γ*. Határozd meg a háromszög harmadik oldalának hosszát és a másik két szög nagyságát, ha:

a) a = 10 cm, b = 15 cm, γ = 60°;

b) a = 5 cm, b = 8 cm, γ = 135°.

30) Az *ABC* háromszögben a = 6 cm, b = 12 cm és γ = 96,38°. Az *A'B'C'* háromszögben b' = 18 cm, c' = 21 cm és β' = 58,41°. Hasonló-e illetve egybevágó-e a két háromszög?

31) Egy háromszög egyik oldala 15 cm, a másik két oldal különbsége 2 cm. A 15 cm-es oldallal szemben lévő szög 139°. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

32) Egy háromszögben az egyik oldal hossza 8,4 cm és az oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 68 mm. Az oldal és a súlyvonal szöge 58°. Mekkorák a háromszög szögei?

33) Egy trapéz két párhuzamos oldala 48,36 cm és 13,41 cm. Az egyik szár 57,82 cm. Ennek a nagyobbik alappal bezárt szöge 68,3°. Határozd meg a trapéz negyedik oldalát és a trapéz ismeretlen szögeit!

34) Egy trapéz keresztmetszetű töltés alul $2+\sqrt{5}$ m, felül 2 m széles, oldalainak hossza $\sqrt{2}$ m és $\sqrt{3}$ m. Mekkora a két oldal emelkedési szöge?

35) Egy domb tetején álló kilátó magasságát keressük. A kilátó tövétől induló lejtős úton lefelé haladva 30 métert, a kilátó 44,47°-os szögben látszik. További 50 métert haladva a kilátó 22°55' alatt látszik. Milyen magas a torony?

36) A pisai ferdetorony csúcsa a torony hajlásának irányában az aljától 20 méterre 73,99°-os emelkedési szögben látszik, az ellenkező irányba 11 métert haladva pedig 75,13°-os szögben látszik. Milyen magasan volt eredetileg a torony csúcsa a talajtól?

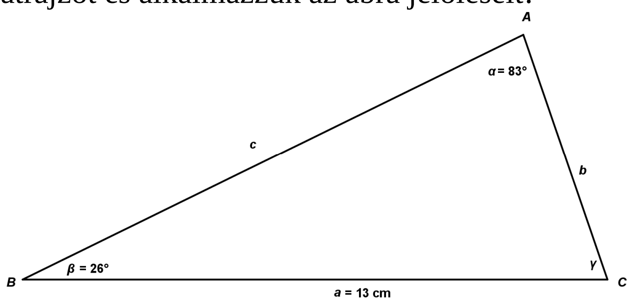
Megoldások

1) Alkalmazzuk a szinusztételt. A megoldás során vegyük figyelembe:

- egy háromszögben hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van és viszont;
- a háromszög belső szögösszege 180°;
- háromszög-egyenlőtlenség tétele.

	a	***b***	***c***	***α***	***β***	***γ***
a)	**14**	**16**	18,49	47,21°	**57°**	75,79°
b)	5,89	10,85	**11**	**31°15’**	**73°**	75,75°
c)	**13,4**	**11,7**	–	– sin α >1	**79°**	–
d)	**5**	**6**	c_1 = 9,94 c_2 = 1,11	**23°**	β_1 = 27,96° β_1 = 152,04°	γ_1 = 129,04° γ_2 = 4,96°
e)	**9**	16,82	13,01	32°	**98°**	**50°**

2) Készítsünk vázlatrajzot és alkalmazzuk az ábra jelöléseit!



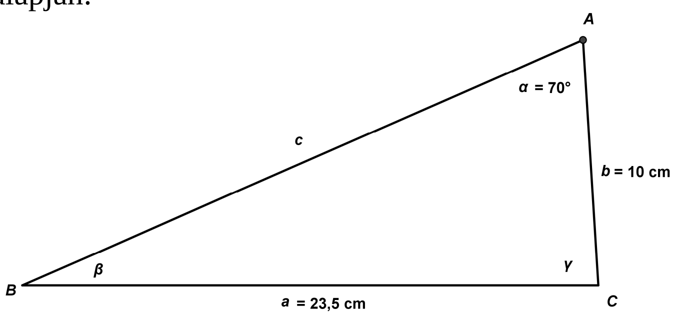
$\frac{\sin 26°}{\sin 83°} = \frac{b}{13} \Rightarrow b \approx 5{,}74$ cm.

$\gamma = 180° - (83° + 26°) = 71°$.

$\frac{\sin 71°}{\sin 83°} = \frac{c}{13} \Rightarrow c \approx 12{,}38$ cm.

A háromszög hiányzó oldalainak hossza 5,74 cm és 12,38 cm.

3) A vázlatrajz alapján:



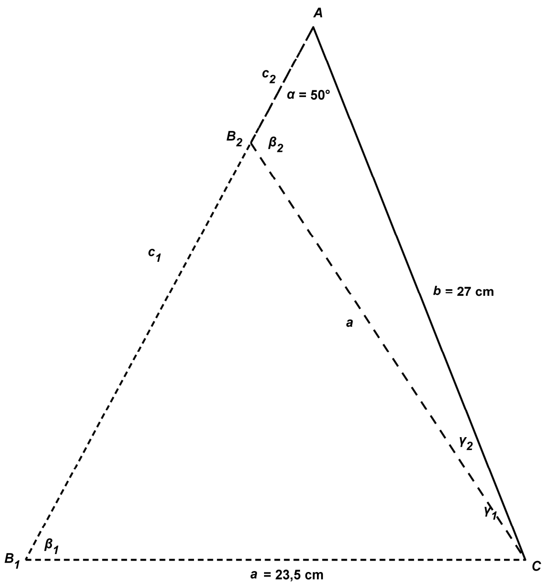
$\frac{\sin \beta}{\sin 70°} = \frac{10}{23{,}5} \Rightarrow \beta \approx 23{,}57°$. ($\beta \neq 156{,}43°$, mert $b < a \Rightarrow \beta < \alpha = 70°$).

$\gamma \approx 180° - (23{,}57° + 70°) = 86{,}43°$.

$$\frac{\sin 86{,}43°}{\sin 70°} \approx \frac{c}{23{,}5} \Rightarrow c \approx 24{,}96 \text{ cm.}$$

A háromszög ismeretlen oldala 24,96 cm, szögei 86,43° és 23,57°.

4) Készítsünk ábrát és alkalmazzuk a jelöléseit!



$$\frac{\sin\beta}{\sin 50°} = \frac{27}{23{,}5} \Rightarrow \sin\beta \approx 0{,}8801 \Rightarrow \beta_1 \approx 61{,}66° \text{ illetve } \beta_2 \approx 118{,}34°.$$

$\gamma_1 \approx 68{,}34°$ illetve $\gamma_2 \approx 11{,}66°$.

$$\frac{\sin 68{,}34°}{\sin 50°} = \frac{c_1}{23{,}5} \Rightarrow c_1 \approx 28{,}51 \text{ cm, illetve } \frac{\sin 11{,}66°}{\sin 50°} = \frac{c_2}{23{,}5} \Rightarrow c_2 \approx 6{,}20 \text{ cm.}$$

A feladatnak kettő megoldása van:
az ismeretlen oldal hossza 28,51 cm, a szögek 61,66° és 68,34° illetve
az ismeretlen oldal hossza 6,20 cm, a szögek 118,34° és 11,66°.

5) Alkalmazzuk a szinusztételt!

$$\frac{\sin\beta}{\sin 52°30'} = \frac{70}{55} \Rightarrow \sin\beta \approx 1{,}01 \Rightarrow \text{A feladatnak nincs megoldása.}$$

6) Alkalmazzuk a szinusztételt!

$\sin 40° : \sin 60° : \sin 80° = a : b : c$.

$$\frac{\sin 40°}{\sin 60°} = \frac{a}{b} \Rightarrow a \approx 0{,}7422b.$$

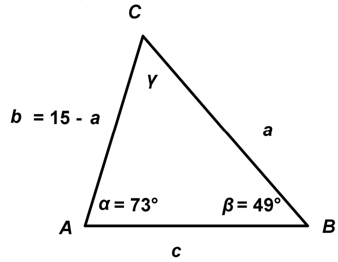
$$\frac{\sin 80°}{\sin 60°} = \frac{c}{b} \Rightarrow c \approx 1{,}1372b.$$

A kerületbe visszahelyettesítve:

$0{,}7422b + b + 1{,}1372b = 20 \Rightarrow b \approx 6{,}95$ cm, $a \approx 5{,}16$ cm, $c \approx 7{,}90$ cm.

A háromszög oldalainak hossza megközelítőleg 6,95 cm, 5,16 cm és 7,90 cm.

7) Alkalmazzuk az ábra jelöléseit, írjuk fel a szinusztételt!



$\frac{\sin 49°}{\sin 73°} = \frac{15-a}{a}$ $\Rightarrow$ $a \approx 8{,}38$ cm, és $b \approx 6{,}62$ cm.

$\gamma = 180° - (73° + 49°) = 58°$.

$\frac{\sin 58°}{\sin 73°} = \frac{c}{8{,}38}$ $\Rightarrow$ $c \approx 7{,}43$ cm.

A háromszög oldalainak hossza 8,38 cm, 6,62 cm és 7,43 cm.

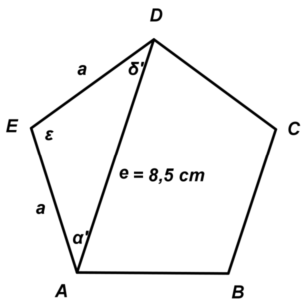
8) Alkalmazzuk a szinusztételt!

$\frac{\sin \beta}{\sin 30°} = \frac{6}{3}$ $\Rightarrow$ $\beta = 90°$, azaz a háromszög derékszögű.

$\gamma = 90° - 30° = 60°$. A hiányzó oldal hosszát Pitagorasz-tétellel vagy szögfüggvénnyel határozzuk meg. Így $c = 3\sqrt{3}$ cm $\approx 5{,}20$ cm.

A háromszög ismeretlen oldala 5,2 cm, szögei 60° és 90°.

9) Alkalmazzuk az ábra jelöléseit!



A szabályos ötszög átlói egyenlő hosszúságúak.

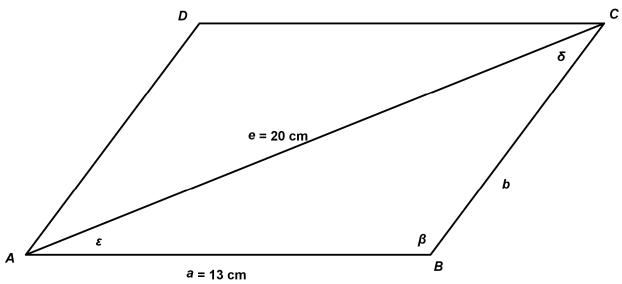
$\varepsilon = \frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°$.

Az ADE háromszög egyenlő szárú, ezért $\alpha' = \delta' = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$.

$\frac{\sin 36°}{\sin 108°} = \frac{a}{8{,}5}$ $\Rightarrow$ $a \approx 5{,}25$ cm.

Az ötszög oldalának hossza 5,25 cm.

10) Alkalmazzuk az ábra jelöléseit!



β = 180° – 53° = 127°.

$$\frac{\sin\delta}{\sin 127°} = \frac{13}{20} \Rightarrow \delta \approx 31{,}27°.$$

$\varepsilon \approx$ 180° – (127° + 31,27°) = 21,73°.

$$T = 2\cdot T_{ABC} = 2\cdot\frac{a\cdot e\cdot\sin\varepsilon}{2} \approx 96{,}26\ \text{cm}^2.$$

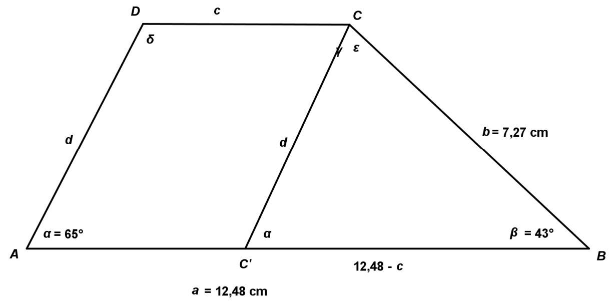
Vagy a b oldalt határozzuk meg szinusztétellel:

$$\frac{\sin 21{,}73°}{\sin 127°} = \frac{b}{20} \Rightarrow b \approx 9{,}27\ \text{cm}.$$

$T = a\cdot b\cdot\sin 53° \approx 96{,}24\ \text{cm}^2$.

A paralelogramma területe megközelítően 96,25 cm^2.

11) Készítsünk ábrát és alkalmazzuk a jelöléseit!



γ = 180° – 43° = 137°, δ = 180° – 65° = 115°.

Toljuk el a d szárat a C csúcsba!

A $C'BC$ háromszögben:

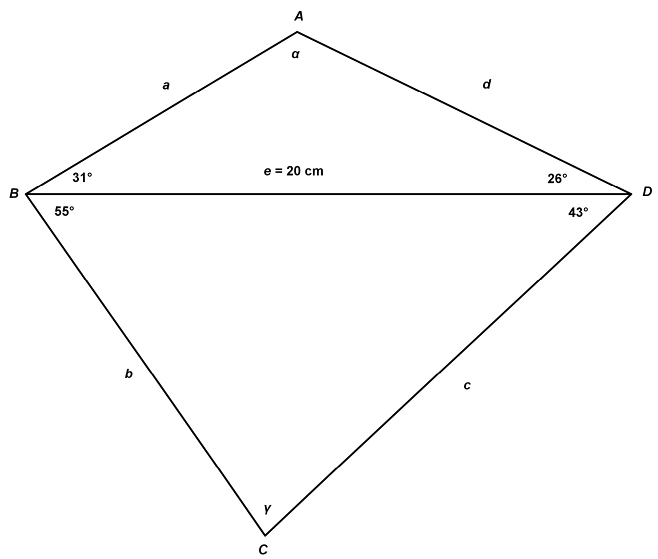
$$\frac{\sin 43°}{\sin 65°} = \frac{d}{7{,}27} \Rightarrow d \approx 5{,}47\ \text{cm}.$$

ε = 180° – (65°+ 43°) = 72°.

$$\frac{\sin 72°}{\sin 65°} = \frac{12{,}48 - c}{7{,}27} \Rightarrow c \approx 4{,}85\ \text{cm}.$$

A trapéz ismeretlen szögei 137° és 115°, szára 5,47 cm, rövidebb alapja 4,85 cm.

12) Az ábra jelöléseit használva:



Az ábra alapján α = 180° – (31° + 26°) = 123° és γ = 180° – (55° + 43°) = 82°.

A *BCD* háromszögben: $\frac{\sin 55°}{\sin 82°} = \frac{c}{20} \Rightarrow c \approx 16{,}54$ cm.

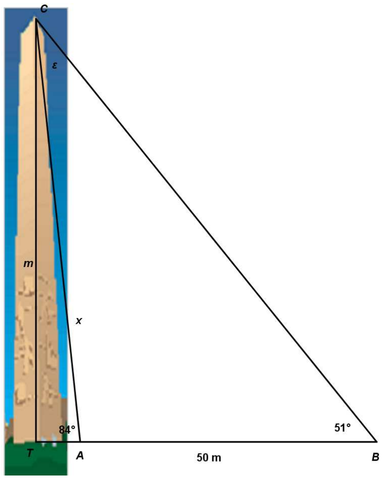
$\frac{\sin 43°}{\sin 82°} = \frac{b}{20} \Rightarrow b \approx 13{,}77$ cm.

A *BDA* háromszögben: $\frac{\sin 31°}{\sin 123°} = \frac{d}{20} \Rightarrow d \approx 12{,}28$ cm.

$\frac{\sin 26°}{\sin 123°} = \frac{a}{20} \Rightarrow a \approx 10{,}45$ cm.

A négyszög oldalai 10,45 cm, 13,77 cm, 16,54 cm és 12,28 cm.

13)



Az ábra alapján ε = 84° – 51° = 33°.

Az *ABC* háromszögben: $\frac{x}{50} = \frac{\sin 51°}{\sin 33°} \Rightarrow x \approx 71{,}35$ m.

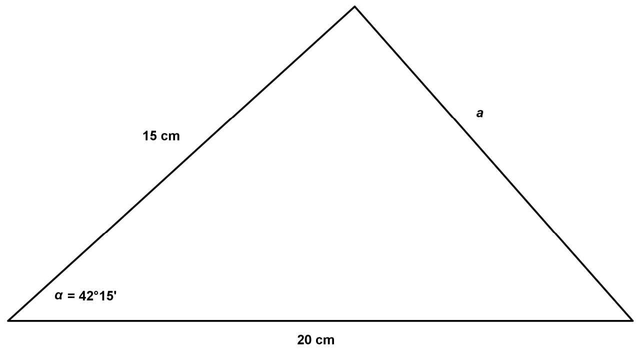
A *TAC* háromszögben: sin 84° = $\frac{m}{71{,}35} \Rightarrow m \approx 70{,}96$ m.

A torony magassága megközelítőleg 71 méter.

14) Alkalmazzuk a koszinusztételt! A további lépések során alkalmazhatjuk a szinusztételt és a belső szögösszegre vonatkozó összefüggést.
A c) esetben határozzuk meg a γ szöget, majd alkalmazzunk szögfüggvényt!
A d) feladatnál alkalmazhatjuk a szinusztételt.
Az e) feladatnál vegyük észre, hogy a háromszög szabályos!

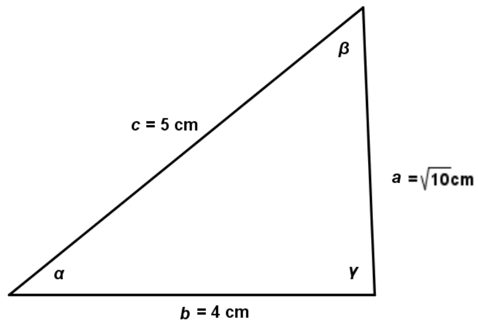
	a	***b***	***c***	***α***	***β***	***γ***
a)	**2,4**	**5**	**4,2**	28,59°	94,55°	56,86°
b)	11,62	**10**	**11**	**67°**	52,39°	60,61°
c)	**21**	**20**	**29**	46,40°	43,60°	90°
d)	6,99	**15**	**11**	25,79°	**111°**	43,21°
e)	**12**	12	**12**	60°	**60°**	60°

15) Az ábra alapján íjuk fel a keresett oldalra a koszinusztételt:



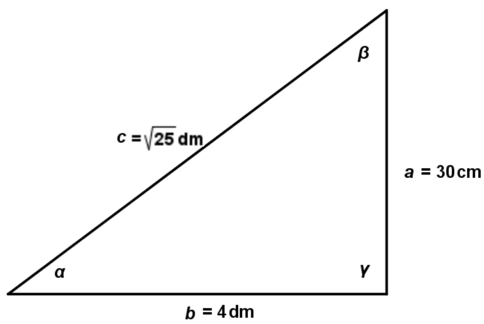
$a^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos 42°15' \Rightarrow a \approx 13{,}45$ cm.
A háromszög harmadik oldala 13,45 cm.

16) Íjuk fel a keresett oldalra a koszinusztételt:



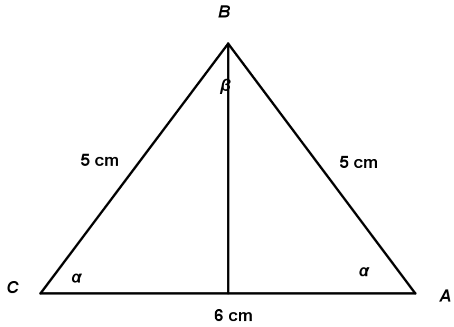
Az ábra alapján: $\sqrt{10}^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha \approx 39{,}19°$.
$\frac{\sin \beta}{\sin 39{,}19°} \approx \frac{4}{\sqrt{10}} \Rightarrow \beta \approx 53{,}06°$.
$\gamma \approx 180° - (39{,}19° + 53{,}06°) = 87{,}75°$.
A háromszög szögei 39,19°, 53,06° és 87,75°.

17) Vegyük észre, hogy a háromszög derékszögű (Pitagorasz-tétel).



$\gamma = 90°$. $\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 36{,}87°, \beta \approx 90° - 36{,}87° = 53{,}13°$.
A háromszög szögei 36,87°, 53,13° és 90°.

18) A háromszög egyenlő szárú, így alkalmazhatunk szögfüggvényt:

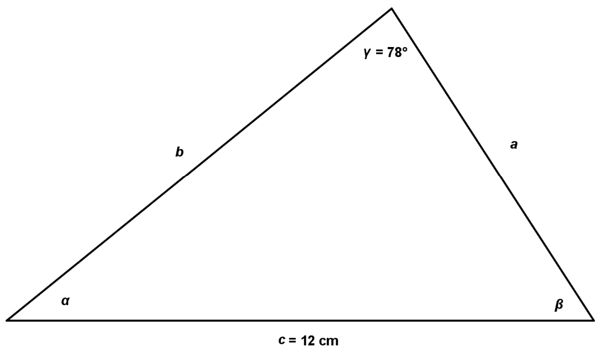


$\cos \alpha = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 53{,}13°$;
$\beta \approx 180° - 2 \cdot 53{,}13° = 73{,}74°$.

A háromszög alapon fekvő szögei 53,13°, szárszöge 73,74°.

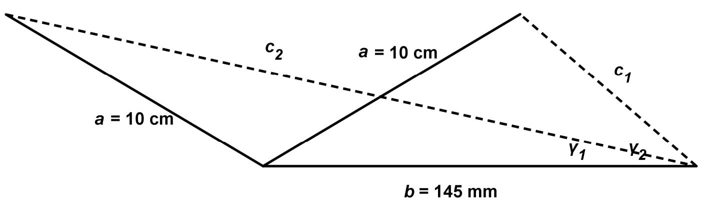
19) 1 cm + 2 cm $\not>$ 3 cm $\Rightarrow$ nem létezik ilyen háromszög.

20) Legyen $a = 3x$ és $b = 4x$. Írjuk fel a koszinusztételt c oldalra!



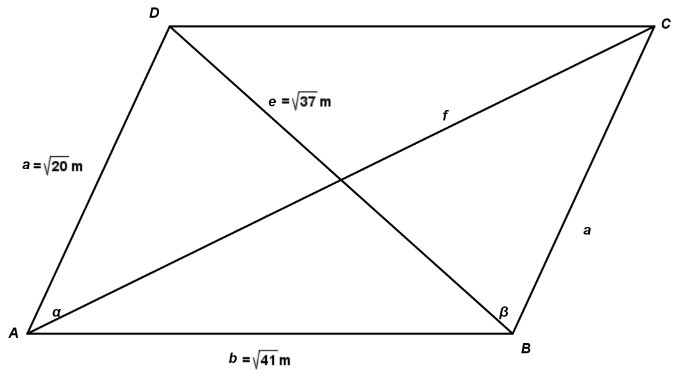
$12^2 = (3x)^2 + (4x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4x \cdot \cos 78° \Rightarrow x \approx 2{,}86$ cm, így $a \approx 8{,}05$ cm és $b \approx 10{,}73$ cm.
A háromszög ismeretlen oldalai 8,05 cm és 10,73 cm.

21)



A terület képlet alapján: $37 = \dfrac{10 \cdot 14{,}5 \cdot \sin \gamma}{2} \Rightarrow \gamma_1 \approx 30{,}69°$ és $\gamma_2 \approx 149{,}31°$ (két megoldás!).
Alkalmazzuk a koszinusztételt!
$c_1^2 = 10^2 + 14{,}5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14{,}5 \cdot \cos 30{,}69° \Rightarrow c_1 \approx 7{,}80$ cm.
$c_2^2 = 10^2 + 14{,}5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14{,}5 \cdot \cos 149{,}31° \Rightarrow c_2 \approx 23{,}66$ cm.
A háromszög harmadik oldala 7,8 cm vagy 23,66 cm.

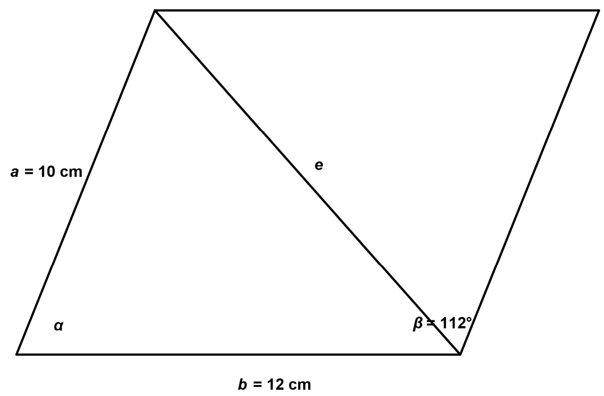
22) A vázlatrajz alapján:



Az *ABD* háromszögben: $\sqrt{37}^2 = \sqrt{20}^2 + \sqrt{41}^2 - 2 \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha \approx 65{,}22°$.
$\beta \approx 180° - 65{,}22° = 114{,}78°$.

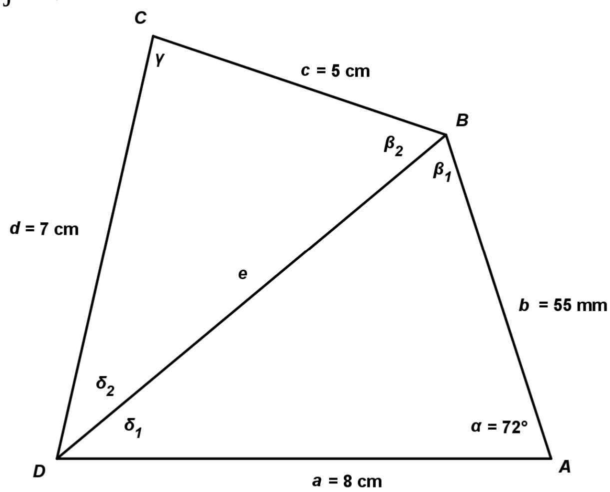
Az *ABC* háromszögben: $f^2 = \sqrt{20}^2 + \sqrt{41}^2 - 2 \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos 114{,}78° \Rightarrow f \approx 9{,}22$ m.
A paralelogramma másik átlója 9,22 m.

23) Készítsünk vázlatrajzot!



$\alpha = 180° - 112° = 68°$.
$e^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 68° \Rightarrow e \approx 12{,}41$ cm.
A paralelogramma rövidebb átlója 12,41 cm.

24) Készítsünk vázlatrajzot:



Alkalmazzuk a koszinusztételt a *DAB* háromszögben:
$e^2 = 5{,}5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5{,}5 \cdot 8 \cdot \cos 72° \Rightarrow e \approx 8{,}19$ cm.
Szinusztétellel:

$\frac{\sin \beta_1}{\sin 72°} = \frac{8}{8{,}19} \Rightarrow \beta_1 \approx 68{,}28°, \beta_1 \neq 111{,}72°$, mert $e > a \Rightarrow \alpha > \beta_1$.

Alkalmazzuk a koszinusztételt a *DBC* háromszögben:

$7^2 = 5^2 + 8{,}19^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8{,}19 \cdot \cos \beta_2 \Rightarrow \beta_2 \approx 58{,}27°$.

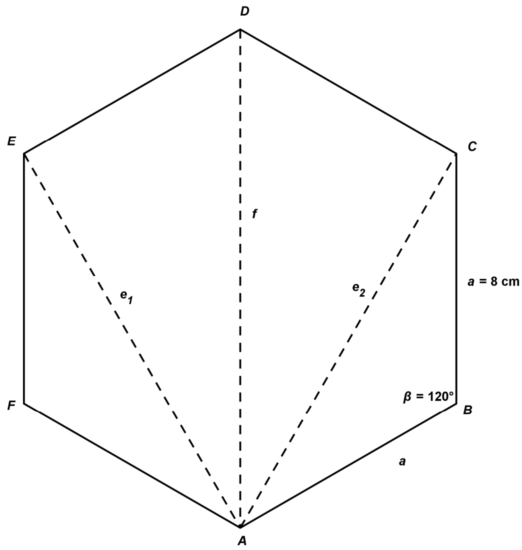
$\beta \approx \beta_1 + \beta_2 = 126{,}27°$.

$8{,}19^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos \gamma \Rightarrow \gamma \approx 84{,}32°$.

$\delta \approx 360° - (72° + 126{,}27° + 84{,}32°) = 77{,}41°$.

A négyszög ismeretlen szögei 126,27°, 84,32° és 77,41°.

25) A vázlatrajz alapján:



A szabályos hatszög köréírható körének sugara és a hatszög oldala egyenlő és átmérője megegyezik a hatszög hosszabbik átlójával, így:

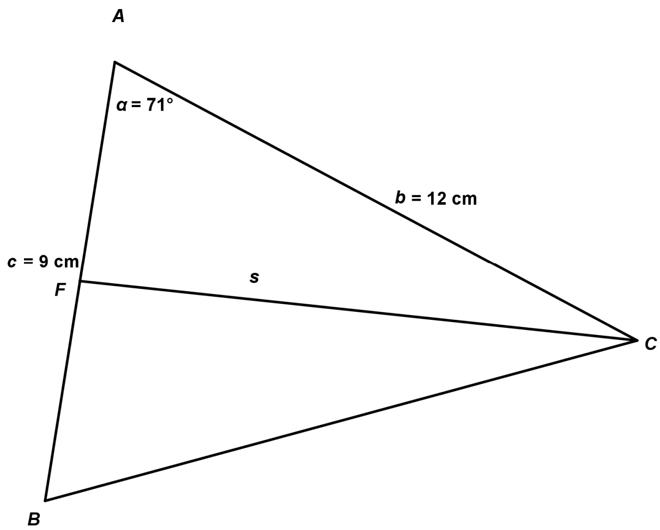
$f = \overline{AD} = 2 \cdot 8$ cm $= 16$ cm.

A szimmetria miatt $e_1 = e_2$. Az *ABC* háromszögben írjuk fel a koszinusztételt.

$e^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120° \Rightarrow e = 13{,}86$ cm.

A szabályos hatszög átlói 13,86 cm és 16 cm.

26) Alkalmazzuk az ábra jelöléseit!



Írjuk fel az *AFC* háromszögben a koszinusztételt:

$s^2 = 12^2 + 4{,}5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 71° \Rightarrow s \approx 11{,}36$ cm.

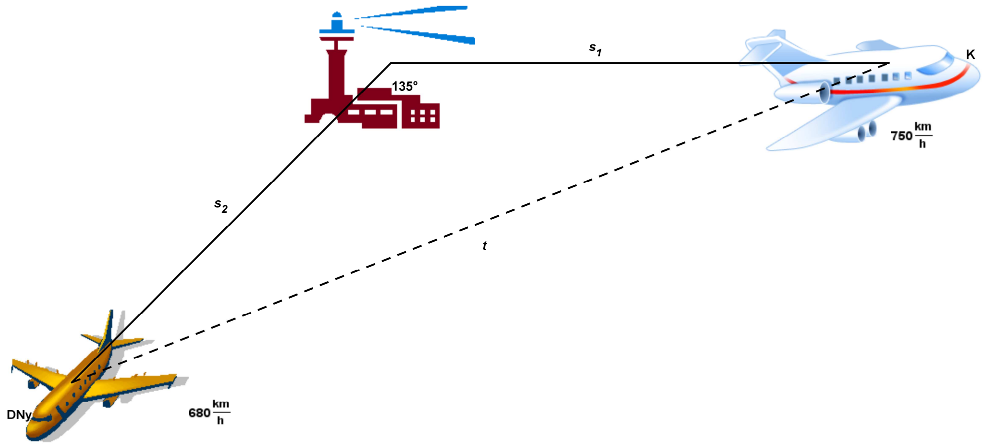
A keresett súlyvonal hossza 11,36 cm.

27) A keleti és a délnyugati irányok által bezárt szög 135°.

A kelet felé repülő repülőgép által megtett út hossza: $s_1 = 750\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{45}{60}\ \text{h} = 562{,}5$ km.

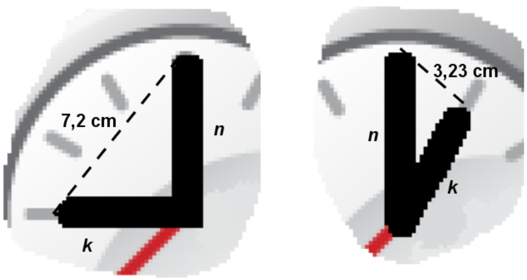
A nyugat felé repülő repülőgép által megtett út hossza: $s_2 = 680\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{45}{60}\ \text{h} = 510$ km.

A koszinusztételt felírva:
$t^2 = 562{,}5^2 + 510^2 - 2\cdot 562{,}5\cdot 510\cdot\cos 135° \Rightarrow t \approx 991{,}06$ km.



A két repülőgép 991,06 km távolságra lesz egymástól 45 perc múlva.

28)



9 órakor az óramutatók szöge derékszög, így alkalmazható Pitagorasz tétele.
1 órakor az óramutatók szöge 30°, alkalmazzuk a koszinusztételt.
Írjunk fel egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 7{,}2^2 &= n^2 + k^2 \\ 3{,}23^2 &= n^2 + k^2 - 2nk\cdot\cos 30° \end{aligned}\right\}$$

A két egyenletet egymásból kivonva, rendezés után $n = \frac{23{,}91}{k}$.

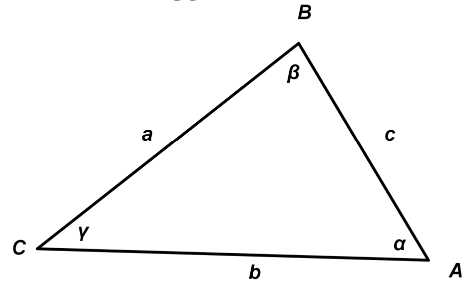
Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$\left(\frac{23{,}91}{k}\right)^2 + k^2 = 51{,}84 \Rightarrow k_1 \approx 3{,}99 \text{ cm és } n_1 \approx 5{,}99 \text{ cm, illetve}$$

$k_2 \approx 5{,}99$ cm és $n_2 \approx 3{,}99$ cm, nem lehetséges, mert $n > k$.

Tehát az óra mutatói 6 cm és 4 cm hosszúak.

29) Írjuk fel az a és b oldalakra a koszinusztételt! Majd alkalmazzuk a szinusztételt és a belső szögösszegre vonatkozó összefüggést!



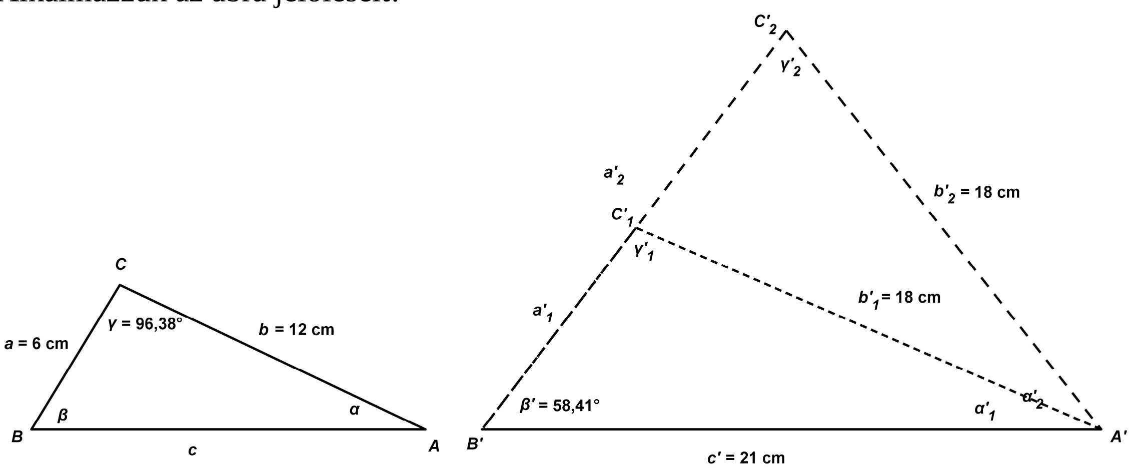
a. $c^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 60° \Rightarrow c = \sqrt{175} = 5 \cdot \sqrt{7} \approx 13{,}23$ cm.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 60°} = \frac{10}{\sqrt{175}} \Rightarrow \alpha \approx 40{,}89°, \beta \approx 79{,}11°;$$

b. $c^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 135° \Rightarrow c = 12{,}07$ cm

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 135°} = \frac{5}{12{,}07} \Rightarrow \alpha \approx 17{,}03°, \beta \approx 27{,}97°;$$

30) Alkalmazzuk az ábra jelöléseit!



A két háromszög biztosan nem egybevágó, mert $b \neq b'$.

Az ABC háromszögben koszinusztételt alkalmazva:

$c^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos 96{,}38° \Rightarrow c \approx 14$ cm.

Szinusztétellel:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 96{,}38°} = \frac{12}{14} \Rightarrow \beta \approx 58{,}41°. \ (\beta \neq 121{,}59°, \text{ mert } \beta < \gamma = 96{,}38°)$$

$\alpha \approx 180° - (96{,}38° + 58{,}41°) = 25{,}21°$.

Az $A'B'C'$ háromszögben koszinusztételt alkalmazva:

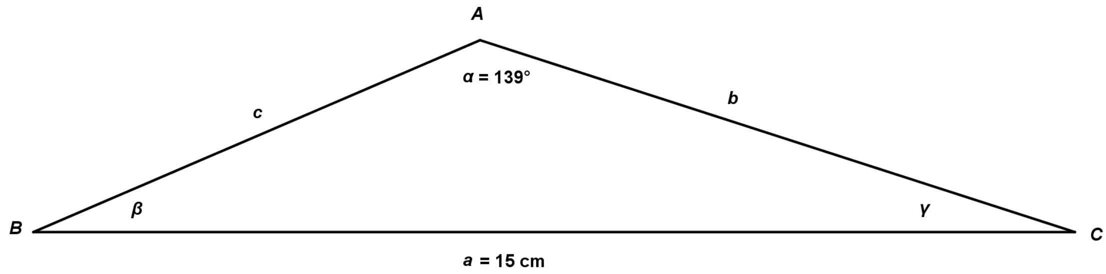
$18^2 = 21^2 + \left(a'\right)^2 - 2 \cdot 21 \cdot a' \cdot \cos 58{,}41° \Rightarrow a_1' \approx 13$ cm illetve $a_2' \approx 9$ cm.

Ha a' = 13 cm, akkor a két háromszög nem hasonló, hiszen $\frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}$.

Ha a' = 9 cm, akkor a két háromszög hasonló, mert:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{3}{2}.$$

31)



Az ábra jelölését használva: $b = c + 2$.

Koszinusztételt felírva:

$15^2 = c^2 + (c+2)^2 - 2\cdot c\cdot(c+2)\cdot\cos 139° \Rightarrow c = 7$ cm és $b = 9$ cm.

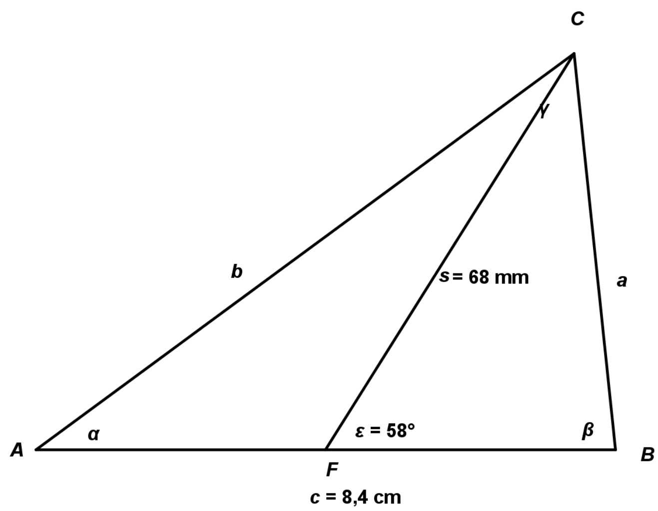
Alkalmazzuk a szinusztételt (csak hegyes szög lehet a megoldás, hiszen α tompaszög):

$$\frac{\sin\gamma}{\sin 139°} = \frac{7}{15} \Rightarrow \gamma \approx 17{,}83°.$$

$\beta \approx 180° - (139° + 17{,}83°) = 23{,}17°$.

A háromszög keresett oldalai 7 cm és 9 cm, szögei 17,83° és 23,17°.

32) Használjuk az ábra jelöléseit!



Az *FBC* háromszögben koszinusztétellel:

$a^2 = 6{,}8^2 + 4{,}2^2 - 2\cdot 6{,}8\cdot 4{,}2\cdot\cos 58° \Rightarrow a \approx 5{,}8$ cm.

Szinusztétellel:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 58°} = \frac{6{,}8}{5{,}8} \Rightarrow \beta \approx 83{,}86°.$$

($\beta \neq 96{,}14°$, mert $6{,}8^2 < 5{,}8^2 + 4{,}2^2 \Rightarrow$ a háromszög hegyesszögű.)

Az *AFC* háromszögben koszinusztétellel:

$b^2 = 6{,}8^2 + 4{,}2^2 - 2\cdot 6{,}8\cdot 4{,}2\cdot\cos 122° \Rightarrow b \approx 9{,}7$ cm.

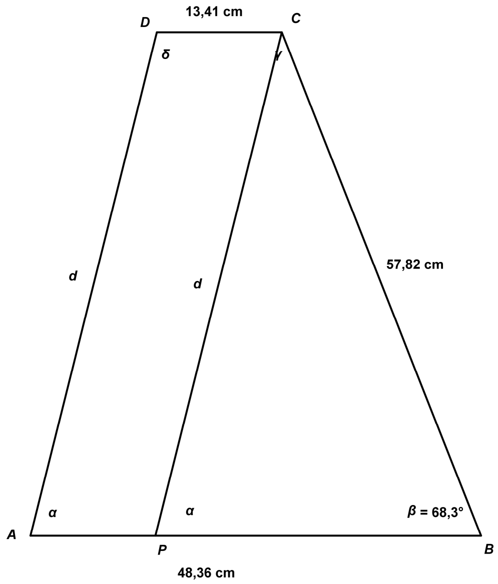
Szinusztétellel:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 122°} = \frac{6{,}8}{9{,}7} \Rightarrow \alpha \approx 36{,}48°.$$

$\gamma \approx 180° - (36{,}48° + 83{,}86°) = 59{,}66°$.

A háromszög szögei 36,48°, 83,86° és 59,66°.

33)

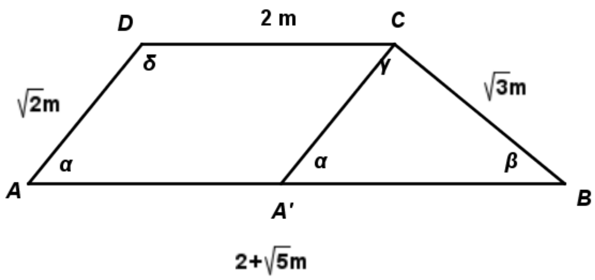


$\gamma \approx 180° - 68{,}3° = 111{,}7°$.
A trapéz *AD* szárát toljuk el, képe legyen *PC*!
$\overline{PB} = x = 48{,}36 \text{ cm} - 13{,}41 \text{ cm} = 34{,}95 \text{ cm}$.
Az *PBC* háromszögben koszinusztételt alkalmazva:
$d^2 = 34{,}95^2 + 57{,}82^2 - 2 \cdot 34{,}95 \cdot 57{,}82 \cdot \cos 68{,}3° \Rightarrow d \approx 55{,}41 \text{ cm}$.
Szinusztételt alkalmazva:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 68{,}3°} = \frac{57{,}82}{55{,}41} \Rightarrow \alpha \approx 75{,}82°.$$

$\delta \approx 180° - 75{,}832° = 104{,}18°$.
A trapéz szára 55,41 cm, ismeretlen szögei 111,7°, 104,18° és 75,82°.

34)



A trapéz *AD* szárát toljuk el, képe legyen *A'C*!
Az *A'BC* háromszögben koszinusztételt alkalmazva:

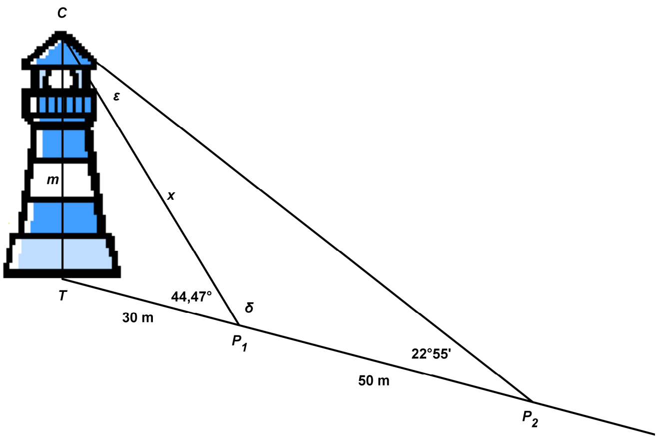
$$\sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\beta \Rightarrow \beta \approx 39{,}23°.$$

Szinusztétellel:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 39{,}29°} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 50{,}86°.$$

Az oldalak emelkedési szöge 50,86° illetve 39,23°.

35)

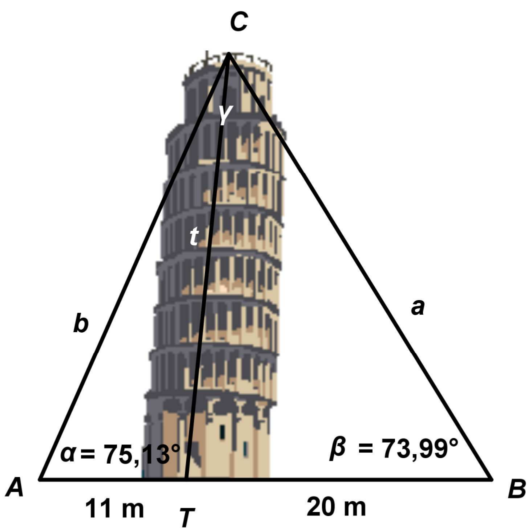


δ = 180° – 44,47° = 135,53°.
ε = 44,47° – 22°55' ≈ 21,55°.
A P_1P_2C háromszögben szinusztétellel:

$$\frac{x}{50} = \frac{\sin 22°55'}{\sin 21{,}55°} \Rightarrow x \approx 53 \text{ m.}$$

TP_1C háromszögben a koszinusztétel alapján:
$m^2 = 30^2 + 53^2 - 2 \cdot 30 \cdot 53 \cdot \cos 44{,}47° \Rightarrow m \approx 37{,}94$ m.
A torony magassága megközelítően 38 m.

36)



γ = 180° – (75,13° + 73,99°) = 30,88°
Az *ABC* háromszögben szinusztételt alkalmazva:

$$\frac{\sin 73{,}99°}{\sin 30{,}88°} = \frac{b}{31} \Rightarrow b \approx 58{,}06 \text{ m}$$

Az *ATC* háromszögben alkalmazzuk a koszinusztételt:
$t^2 = 11^2 + 58{,}06^2 - 2 \cdot 11 \cdot 58{,}06 \cdot \cos 75{,}13° \Rightarrow t \approx 56{,}25$ m.
A torony eredeti magassága megközelítőleg 56,25 m.
(Mj.: a torony dőlési szöge megközelítőleg 3,97°, a csúcsánál megközelítőleg 3,9 méterrel tér el a függőlegestől.)