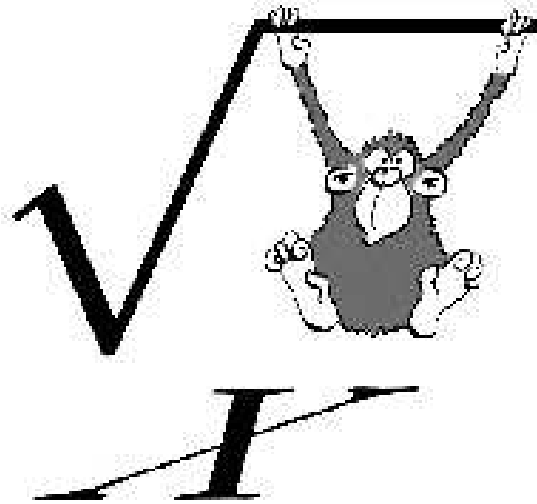
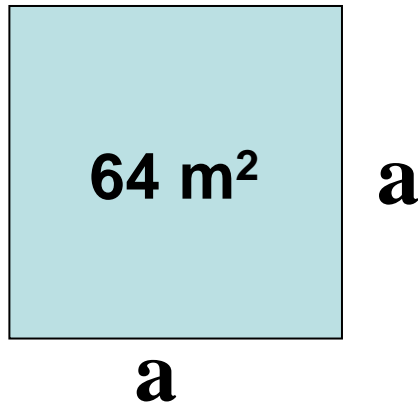


Az eredeti dokumentum az users.atw.hu/mgvacmatek/negyzetgyok.pdf címen érhető el.

A négyzetgyökvonás



Mekkora a 64 m^2 területű, négyzet alakú tanterem oldalának a hossza?



Keressük azt a nemnegatív számot, melynek a négyzete 64.

Ezt a számot a 64 négyzetgyökének

nevezzük, és így jelöljük: $\sqrt{64}$

$$T = a^2$$

$$a = \sqrt{64} = 8, \text{ mert } 8^2 = 64$$

Tehát a tanterem oldalának hossza 8 m.

Egy a nemnegatív valós szám négyzetgyöke az a nemnegatív valós szám, amelynek négyzete a .

Jelölése: \sqrt{a} *Olvasd: négyzetgyök a*

Megjegyzés:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad a \in R \text{ és } a \geq 0$$

Példa

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{2} = 1,41$$

$$\sqrt{3} = 1,73$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{100} = 10$$

A négyzetgyökvonás azonosságai

A szorzat négyzetgyöke

Bármely két nemnegatív szám szorzatának a négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének a szorzatával,

azaz

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

ahol $a \geq 0$ és $b \geq 0$.

Példa

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{140} = \sqrt{5 \cdot 7 \cdot 140} = \sqrt{4900} = 70$$

A hányados négyzetgyöke

Bármely két nemnegatív szám hányadosának a négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének a hányadosával,

azaz

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ahol $a \geq 0$ és $b > 0$.

Példa

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$$

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{112}{7}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{99}{11}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{147}{3}} = \sqrt{49} = 7$$

A négyzetgyök alkalmazásai

Négyzetgyökös mennyiségek összeadása, kivonása

Csak az egyenemű négyzetgyökös kifejezések
vonhatók össze!

$$13\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + \sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$9\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$7\sqrt{11} - 3\sqrt{11} + 2\sqrt{11} + 4\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = 15\sqrt{11}$$

$$8\sqrt{5} + 7\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

Kihozatal a gyökjel alól

$$\sqrt{216} =$$

$$\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} =$$

$$2 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

Bontsuk fel a 216-ot prímtényezők szorzatára!

$$216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Keressük a négyzetgyök alatti kifejezésben négyzetes tagokat

A gyökök szorzatánál tanult azonosság segítségével írjuk fel külön – külön gyökjel alá a négyzetes tagokat, majd vegyük a négyzetgyökét.

Az így kapott számot írjuk a négyzetgyökjel elé.

Megjegyzés:

Ha a négyzetgyökjel alatt olyan szorzat áll, aminek az egyik tényezője négyzetszám, akkor ennek a tényezőnek a négyzetgyöke kiemelhető a négyzetgyökjel elé.

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b} \quad a \geq 0, b \geq 0$$

Példa

$$\sqrt{360} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$$\sqrt{168} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7} = 2 \cdot \sqrt{42} = 2\sqrt{42}$$

$$\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3150} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 7} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 7} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{14} = 15\sqrt{14}$$

Bevitel a gyökjel alá

$$6\sqrt{2} =$$

A négyzetgyökös azonosság felhasználásával írjuk fel a négyzetgyök előtti szám négyzetének a gyökét.

$$\sqrt{6^2} \cdot \sqrt{2} =$$

A szorzat négyzetgyökére vonatkozó szabály segítségével írjuk egy gyökjel alá a két mennyiséget, majd szorozzuk össze.

$$\sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72}$$

Megjegyzés:

Négyzetgyökjel előtt álló nemnegatív szorzó a négyzetét a gyökjel alá vihetjük.

$$a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b} \quad a \geq 0, b \geq 0$$

Példa

$$6\sqrt{2} = \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72}$$

$$8\sqrt{2} = \sqrt{8^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{64 \cdot 3} = \sqrt{192}$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{175}$$

$$9\sqrt{2} = \sqrt{9^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{81 \cdot 5} = \sqrt{405}$$

$$11\sqrt{2} = \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{121 \cdot 6} = \sqrt{726}$$

A nevező gyöktelenítése

Gyakran kell olyan törtekkel számolni, ahol a nevezőben négyzetgyökös kifejezés áll.

$$\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} =$$

Ilyen esetben a közös nevező megállapítása igen körülményes bővítéshez vezet.

Célszerű úgy átalakítani a törteket, hogy a nevezőjük racionális alakúak legyenek.

Ezt a gyakorlatban a nevező gyöktelenítésével érjük el.

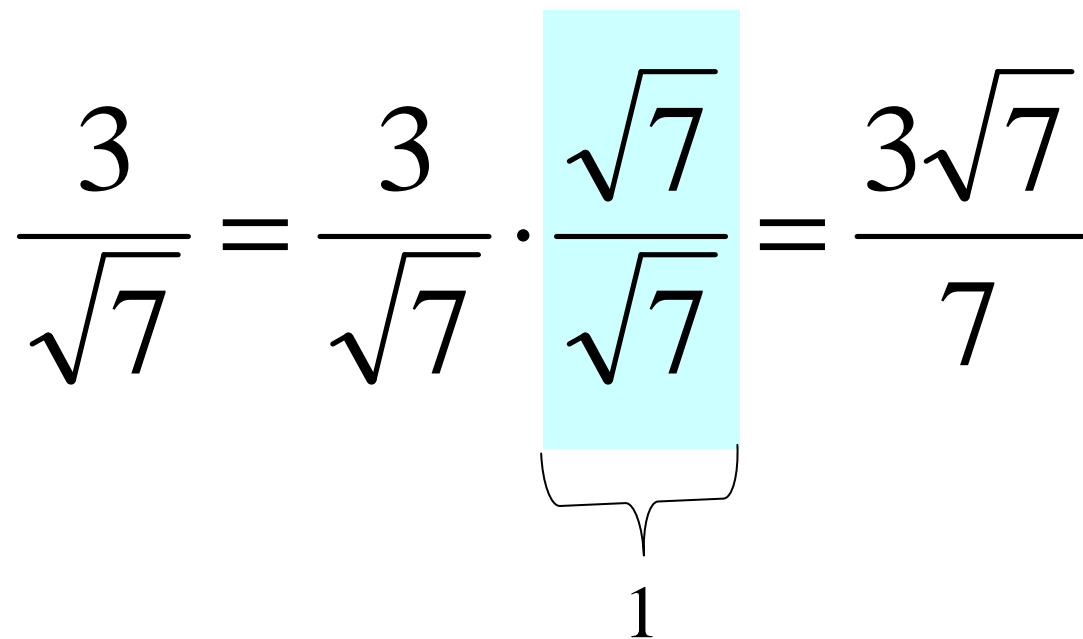
A Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét!

$$\frac{3}{\sqrt{7}}; \quad \frac{5}{3\sqrt{5}}; \quad \frac{a}{b\sqrt{c}};$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}-1}; \quad \frac{6}{4-\sqrt{5}}; \quad \frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}};$$

Törtet úgy gyöktelenítjük, hogy egy alkalmasan választott egységgel szorozzuk a törtet.

Szorzás olyan törttel, melynek a számlálója és a nevezője is megegyezik a gyöktelenítendő tört gyökös kifejezésével.

$$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$


$$\frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{3 \cdot (\sqrt{5})^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{5\sqrt{5}}{15}$$

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a}{b\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b \cdot (\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{b \cdot c}$$

Nevezetes azonosság alkalmazásával.

$$\frac{8}{\sqrt{3}-1} =$$

A nevezőben egy különbség található, ezért olyan azonosságot kell találni, amely tagonként emeli négyzetre a nevezőt.

Ez az $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$$\frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} =$$

$$= \frac{8 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2} = \frac{8 \cdot (\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{8 \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} = 4(\sqrt{3}+1)$$

$$\frac{6}{4-\sqrt{5}} = \frac{6}{4-\sqrt{5}} \cdot \frac{4+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} = \frac{6 \cdot (4+\sqrt{5})}{(4)^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{24+6\sqrt{5}}{16-5} = \frac{24+6\sqrt{5}}{11}$$

$$\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{8}+\sqrt{5})}{(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2(\sqrt{8}+\sqrt{5})}{8-5} = \frac{2\sqrt{8}+2\sqrt{5}}{3}$$

.....

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{7}+\sqrt{2}} &= \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{7}+\sqrt{2}} \cdot \frac{5\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot (5\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(5\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{7} - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{25 \cdot 7 - 2} = \frac{15\sqrt{14} - 6}{173} \end{aligned}$$