5. A logaritmus fogalma, a logaritmus azonosságai

I. Elméleti összefoglaló

Ha $a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ y>0$ valós számok és n tetszőleges valós szám, akkor

$$a^{\log_a x}=x$$

$$\log_a a=1,\ \log_a 1=0$$

$$\log_a x+\log_a y=\log_a xy$$

$$\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$$

$$n\cdot\log_a x=\log_a x^n$$

Ha $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ x>0$ valós számok, akkor

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ha $a>1$, akkor az $f(x)=\log_a x$ függvény szigorúan monoton növekvő, míg ha $0<a<1$, akkor az $f(x)=\log_a x$ függvény szigorúan monoton csökkenő.

II. Kidolgozott feladatok

1. Számológép használata nélkül határozza meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $\log_2\log_2\sqrt[4]{2}$ **b)** $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$ **c)** $(\log_6 10)\cdot\left(\lg\sqrt[10]{216}\right)$

d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\log_4 81}$ **e)** $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$ **f)** $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

Megoldás: a) $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2} = \log_2 \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

b) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}} = -\log_2 \log_2 2^{\frac{1}{8}} = -\log_2\left(\frac{1}{8}\log_2 2\right) = -\log_2 2^{-3} = 3$

c) $(\log_6 10)\cdot\left(\lg \sqrt[10]{216}\right) = \frac{\lg 10}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 216}{10} = \frac{1}{\lg 6}\cdot\frac{3\cdot\lg 6}{10} = \frac{3}{10}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{4} = 2^{-\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{-\frac{3}{4}}$, így

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\log_4 81} = \left(4^{-\frac{3}{4}}\right)^{\log_4 81} = \left(4^{\log_4 81}\right)^{-\frac{3}{4}} = 81^{-\frac{3}{4}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

e) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}} = \sqrt{5^{2\log_5 6} + 7^{2\log_7 8}} = \sqrt{5^{\log_5 36} + 7^{\log_7 64}} = \sqrt{36+64} = 10$

f) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}} = 3^{4\log_3 5} + 3^{\frac{3}{2}\log_3 36} + 3^{\frac{4}{2}\log_3 7} = 5^4 + 36^{\frac{3}{2}} + 49 = 625 + 216 + 49 = 890$

2. **a)** Fejezze ki $\log_6 27$ értékét $a = \log_6 2$ segítségével.
b) Fejezze ki $\lg 56$ értékét $a = \lg 2$ és $b = \log_2 7$ segítségével.
c) Fejezze ki $\log_{30} 8$ értékét $a = \lg 5$ és $b = \lg 3$ segítségével.

Megoldás: a) $1 = \log_6 6 = \log_6 2 + \log_6 3 = a + \log_6 3$, így $\log_6 3 = 1 - a$.
$\log_6 27 = 3\cdot\log_6 3 = 3(1-a)$

b) $\lg 56 = \lg(7\cdot 8) = \lg 7 + \lg 8 = \lg 7 + 3\lg 2 = \frac{\log_2 7}{\log_2 10} + 3\lg 2$,

és $\frac{\log_2 7}{\log_2 10} = \log_2 7\cdot\lg 2$. Így $\lg 56 = \log_2 7\cdot\lg 2 + 3\lg 2 = ab + 3a = a(b+3)$.

c) $\log_{30} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 30} = \frac{3}{\log_2(2\cdot 3\cdot 5)} = \frac{3}{1+\log_2 3+\log_2 5}$. Határozzuk meg $\log_2 3$ és $\log_2 5$ értékét.

$a = \lg 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 10} = \frac{\log_2 5}{\log_2(2\cdot 5)} = \frac{\log_2 5}{1+\log_2 5}$, ebből $\log_2 5 = \frac{a}{1-a}$.

$$b=\lg 3=\frac{\log_2 3}{\log_2 10}=\frac{\log_2 3}{\log_2(2\cdot 5)}=\frac{\log_2 3}{1+\log_2 5}=\frac{\log_2 3}{1+\frac{a}{1-a}}=(1-a)\log_2 3,$$ és innen $\log_2 3=\frac{b}{1-a}$.

Ezekből $\log_{30} 8=\frac{3}{1+\frac{b}{1-a}+\frac{a}{1-a}}=\frac{3(1-a)}{1+b}$.

3. Ha $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_n(n+1)=10$, akkor mennyi n értéke?

Megoldás:

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_n(n+1)=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\lg(n+1)}{\lg n}=\frac{\lg(n+1)}{\lg 2}$$

(egyszerűsítettünk a számlálókban és a nevezőkben levő azonos tényezőkkel) és $\frac{\lg(n+1)}{\lg 2}=\log_2(n+1)=10$, így $2^{10}=n+1$, $1024=n+1$, tehát $n=1023$.

4. Mutassa meg, hogy az $\frac{1}{\log_4 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_9 2}$ számok egy számtani sorozat egymást követő elemei.

Megoldás: Elég azt igazolni, hogy a második tag a két szomszédos tag számtani közepe:

$$\frac{1}{\log_4 2}+\frac{1}{\log_9 2}=\log_2 4+\log_2 9=\log_2 36=2\cdot\log_2 6=2\cdot\frac{1}{\log_6 2}$$

5. Tudjuk, hogy $\log_b a^3=2$. Mennyi $\log_a b^3$ értéke?

Megoldás: Ha $\log_b a^3=2$, akkor $3\cdot\log_b a=2$, $\log_b a=\frac{2}{3}$, $\log_a b=\frac{3}{2}$, $3\cdot\log_a b=\frac{9}{2}$, $\log_a b^3=\frac{9}{2}$.

III. Ajánlott feladatok

1. Az x milyen értékeinél értelmezhető az $f(x)$ függvény?

a) $f(x)=\dfrac{1}{\lg\lg x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\lg x-1}}$ **c)** $f(x)=\log_2\log_3\dfrac{2x^2-2x}{x^2-5x}$

2. Mennyi az alábbi kifejezések értéke? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

a) $5^{\log_{\sqrt{5}}4-\log_5 2+2\log_{25}3}$ **b)** $49^{\log_7 2+\log_{\sqrt{7}}4-\frac{1}{2}\log_{49}64}$

c) $7^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 7}}$ **d)** $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}}+5^{\log_{25}49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}}-8^{\log_4 9}\right)}{3+5^{\frac{1}{\log_{16}25}}\cdot 5^{\log_5 3}}$

3. Számolja ki $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$ értékét! (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

4. Mennyi a $\lg(1+1)+\lg\left(1+\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\lg\left(1+\frac{1}{98}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{99}\right)$ összeg értéke?

5. $\dfrac{1}{\log_2 100!}+\dfrac{1}{\log_3 100!}+\dfrac{1}{\log_4 100!}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{100}100!}=?$

6. Rendezze nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat! (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

$A=4^{\log_2 3}$, $B=2^{\frac{1}{\log_3 2}}$, $C=\dfrac{\log_4 8}{\log_{32}8}$, $D=\lg\sin 30^\circ+\lg\tan 30^\circ+\lg\sin 60^\circ+\lg 4$

7. Melyik szám a nagyobb? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

a) $\log_3 108$ vagy $\log_5 375$ **b)** $\log_4 60$ vagy $\log_3 30$

c) $\log_4 9$ vagy $\log_9 25$ **d)** $\log_4 5$ vagy $\log_5 6$

e) $\lg^2 11$ vagy $\lg 12$ **f)** $\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8+\log_8 5$ vagy 4

8. Igazolja az $\log_{ab} c = \dfrac{(\log_a c)\cdot(\log_b c)}{\log_a c + \log_b c}$ azonosságot, ahol *a, b, c* 1-től különböző pozitív számok!

9. Ha $\log(ab) + \log(bc) + \log(ac) = 10$ (ahol *a, b, c* pozitív számok), akkor mennyi $\log(abc)$ értéke?

10. $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$, $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x \neq 10,\ y \neq 10,\ z \neq 10.$

Igazolja, hogy $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

11. Mutassa meg, hogy $\log_2 3 + \log_2 5 = (\log_7 15)\cdot(\log_2 7)$.

12. Ha $3^a = 4^b = 36$, akkor mennyi $\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b}$ értéke?

13. $\log_y x + \log_x y = 7$. Mennyi $(\log_y x)^2 + (\log_x y)^2$ értéke?

14. Mennyi $5^{\lg 2} + 2^{\lg 5} - 50^{\lg 2}$ értéke? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

15. Melyik a nagyobb: $5^{\lg 3} - 3^{\lg 5}$ vagy $5^{\sqrt{\log_5 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 5}}$? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

16. Az *a* egész számra $a < \log_{\frac{1}{7}} 143 < a + 1$. Mennyi *a* értéke? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

17. Az *a, b, c* pozitív, 1-től különböző számokra $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 0$. Mennyi $(\log_a b)^3 + (\log_b c)^3 + (\log_c a)^3$ értéke?

18. Az *x*, *y* és *z* 1-től különböző pozitív számokra és a $w > 0$ számra $\log_x w = 6,\ \log_y w = 10$ és $\log_{xyz} w = 3$. Mennyi $\log_z w$ értéke?

19. Egy derékszögű háromszög két befogója *a* és *b*, átfogója *c*, $c + b \neq 1$, $c - b \neq 1$. Igazolja, hogy $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \cdot \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$.

20. $a^2 + b^2 = 7ab,\ a > 0,\ b > 0.$ Igazolja, hogy $\lg\dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\lg a + \lg b)$.

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Az x milyen értékeinél értelmezhető az $f(x)$ függvény?

a) $f(x)=\dfrac{1}{\lg\lg x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\lg x-1}}$ **c)** $f(x)=\log_2\log_3\dfrac{2x^2-2x}{x^2-5x}$

Megoldás: a) $]1,\ 10[\ \cup\ ]10,\ \infty[$; **b)** $]10,\ \infty[$; **c)** $]-\infty,\ -3[\ \cup\ ]5,\ \infty[$

2. Mennyi az alábbi kifejezések értéke? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

a) $5^{\log_{\sqrt{5}}4-\log_5 2+2\log_{25}3}$ **b)** $49^{\log_7 2+\log_{\sqrt{7}}4-\frac{1}{2}\log_{49}64}$

c) $7^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 7}}$ **d)** $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}}+5^{\log_{25}49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}}-8^{\log_4 9}\right)}{3+5^{\frac{1}{\log_{16}25}}\cdot 5^{\log_5 3}}$

Megoldás: a) 24; **b)** 128; **c)** $\lg 2$; **d)** -11

3. Számolja ki $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$ értékét! (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

Megoldás: 5

4. Mennyi a $\lg(1+1)+\lg\left(1+\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\lg\left(1+\frac{1}{98}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{99}\right)$ összeg értéke?

Megoldás: Hozzunk mindenhol közös nevezőre és alkalmazzuk a $\log a+\log b=\log ab$ azonosságot.

$$\lg(1+1)+\lg\left(1+\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\lg\left(1+\frac{1}{98}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{99}\right)=$$

$$=\lg\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}\right)=\lg 100=2.$$

5. $\dfrac{1}{\log_2 100!}+\dfrac{1}{\log_3 100!}+\dfrac{1}{\log_4 100!}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{100} 100!}=?$

Megoldás: Használjuk fel a $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ és a $\log a+\log b=\log ab$ azonosságokat!

$$\frac{1}{\log_2 100!}+\frac{1}{\log_3 100!}+\frac{1}{\log_4 100!}+\ldots+\frac{1}{\log_{100} 100!}=$$
$$=\log_{100!}2+\log_{100!}3+\log_{100!}4+\ldots+\log_{100!}100=$$
$$=\log_{100!}(2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100)=\log_{100!}100!=1.$$

6. Rendezze nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat! (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

$$A=4^{\log_2 3},\ B=2^{\frac{1}{\log_3 2}},\ C=\frac{\log_4 8}{\log_{32} 8},\ D=\lg\sin 30^\circ+\lg\tan 30^\circ+\lg\sin 60^\circ+\lg 4$$

Megoldás: $D<C<B<A$.

Mivel $A=4^{\log_2 3}=\left(2^2\right)^{\log_2 3}=2^{\log_2 3^2}=2^{\log_2 9}=9$,

$B=2^{\frac{1}{\log_3 2}}=2^{\log_2 3}=3$,

$C=\dfrac{\log_4 8}{\log_{32} 8}=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}:\dfrac{\log_2 8}{\log_2 32}=\dfrac{3}{2}:\dfrac{3}{5}=\dfrac{5}{2}$,

$D=\lg\dfrac{1}{2}+\lg\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\lg\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\lg 4=\lg\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\right)=\lg 1=0$.

7. Melyik szám a nagyobb? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

a) $\log_3 108$ vagy $\log_5 375$

b) $\log_4 60$ vagy $\log_3 30$

c) $\log_4 9$ vagy $\log_9 25$

d) $\log_4 5$ vagy $\log_5 6$

e) $\lg^2 11$ vagy $\lg 12$

f) $\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8+\log_8 5$ vagy 4

Megoldás: a) $\log_3 108=\log_3(4\cdot 27)=3+\log_3 4>4$ és
$\log_5 375=\log_5(3\cdot 125)=3+\log_5 3<4$, ezért $\log_3 108>\log_5 375$.

b) $\log_4 60<\log_4 64=3=\log_3 27<\log_3 30$.

c) $\log_4 9>\log_4 8=\dfrac{3}{2}=\log_9 27>\log_9 25$.

d) $\log_4 \frac{5}{4} > \log_5 \frac{5}{4} > \log_5 \frac{5}{6}$, így $\log_4 5 - \log_4 4 > \log_5 6 - \log_5 5$, tehát $\log_4 5 > \log_5 6$.

e) $\lg^2 11 = (1 + \lg 1{,}1)^2 > 1 + 2 \cdot \lg 1{,}1 = 1 + \lg 1{,}21 = \lg 12{,}1 > \lg 12$.

f) Pozitív számok számtani és mértani közepei között fenn áll az $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ egyenlőtlenség, ahol az egyenlőség csak akkor teljesül, ha a számok egyenlők.

$$\log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 5 = \frac{\lg 6}{\lg 5} + \frac{\lg 7}{\lg 6} + \frac{\lg 8}{\lg 7} + \frac{\lg 5}{\lg 8} > 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{\lg 6}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 7}{\lg 6} \cdot \frac{\lg 8}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 8}} = 4$$

8. Igazolja az $\log_{ab} c = \frac{(\log_a c) \cdot (\log_b c)}{\log_a c + \log_b c}$ azonosságot, ahol *a, b, c* 1-től különböző pozitív számok!

Megoldás: $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$, azaz $\frac{1}{\log_{ab} c} = \frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}$, vagyis $\frac{1}{\log_{ab} c} = \frac{\log_b c + \log_a c}{(\log_a c) \cdot (\log_b c)}$, tehát $\log_{ab} c = \frac{(\log_a c) \cdot (\log_b c)}{\log_a c + \log_b c}$.

9. Ha $\log(ab) + \log(bc) + \log(ac) = 10$ (ahol *a, b, c* pozitív számok), akkor mennyi $\log(abc)$ értéke?

Megoldás:
$10 = \log(ab) + \log(bc) + \log(ac) = \log(ab \cdot bc \cdot ac) = \log(abc)^2 = 2 \cdot \log(abc)$,
innen $\log(abc) = 5$.

10. $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$, $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x \neq 10,\ y \neq 10,\ z \neq 10$.

Igazolja, hogy $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

Megoldás: $\lg y = \frac{1}{1-\lg x}$ és $\lg z = \frac{1}{1-\lg y} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\lg x}} = \frac{1-\lg x}{-\lg x} = 1 - \frac{1}{\lg x}$, tehát $\frac{1}{\lg x} = 1 - \lg z$, ezért $\lg x = \frac{1}{1-\lg z}$, azaz $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

11. Mutassa meg, hogy $\log_2 3 + \log_2 5 = (\log_7 15)\cdot(\log_2 7)$.

Megoldás: $\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$ és

$(\log_7 15)\cdot(\log_2 7) = \frac{\lg 15}{\lg 7}\cdot\frac{\lg 7}{\lg 2} = \frac{\lg 15}{\lg 2} = \log_2 15$, így valóban

$\log_2 3 + \log_2 5 = (\log_7 15)\cdot(\log_2 7)$.

12. Ha $3^a = 4^b = 36$, akkor mennyi $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ értéke?

Megoldás: Ha $3^a = 36$, akkor $3 = 36^{\frac{1}{a}}$, és $9 = 36^{\frac{2}{a}}$. Ha $4^b = 36$, akkor $4 = 36^{\frac{1}{b}}$. Szorozzuk össze a $9 = 36^{\frac{2}{a}}$ és $4 = 36^{\frac{1}{b}}$ egyenlőségeket: $36 = 36^{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}$, tehát $\frac{2}{a}+\frac{1}{b} = 1$.

13. $\log_y x + \log_x y = 7$. Mennyi $(\log_y x)^2 + (\log_x y)^2$ értéke?

Megoldás: Legyen $a = \log_y x,\ \ b = \log_x y$. Tudjuk, hogy $a+b = 7,\ ab = 1$.

Ekkor $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 7^2 - 2 = 47$.

14. Mennyi $5^{\lg 2} + 2^{\lg 5} - 50^{\lg 2}$ értéke? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

Megoldás: $5^{\lg 2} = 2^{\lg 5}$, hiszen mindkét oldal logaritmusát véve az $\lg 2\cdot\lg 5 = \lg 5\cdot\lg 2$ azonos egyenlőtlenséget kapjuk. Belátjuk, hogy $5^{\lg 2} + 2^{\lg 5} = 50^{\lg 2}$ (emiatt $5^{\lg 2} + 2^{\lg 5} - 50^{\lg 2} = 0$ lesz). Felhasználva az első megállapítást, egyenlőségünk $2\cdot 5^{\lg 2} = 50^{\lg 2}$, és ez igaz, hiszen $50^{\lg 2} = (10\cdot 5)^{\lg 2} = 10^{\lg 2}\cdot 5^{\lg 2} = 2\cdot 5^{\lg 2}$.

15. Melyik a nagyobb: $5^{\lg 3} - 3^{\lg 5}$ vagy $5^{\sqrt{\log_5 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 5}}$? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

Megoldás: Mindkettő értéke 0. $5^{\lg 3} = 3^{\lg 5}$, hiszen $\lg 5^{\lg 3} = \lg 3^{\lg 5}$, azaz $\lg 3\cdot\lg 5 = \lg 5\cdot\lg 3$.

Ugyanígy $5^{\sqrt{\log_5 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 5}}$, hiszen $\lg\left(5^{\sqrt{\log_5 3}}\right) = \lg\left(3^{\sqrt{\log_3 5}}\right)$, mivel $\left(\sqrt{\log_5 3}\right)\cdot(\lg 5) = \left(\sqrt{\log_3 5}\right)\cdot(\lg 3)$, ugyanis $\left(\sqrt{\frac{\lg 3}{\lg 5}}\right)\cdot(\lg 5) = \left(\sqrt{\frac{\lg 5}{\lg 3}}\right)\cdot(\lg 3)$, mert ezt átrendezve a $(\lg 3)\cdot(\lg 5) = (\lg 5)\cdot(\lg 3)$ egyenlőséget kapjuk.

16. Az a egész számra $a < \log_{\frac{1}{7}} 143 < a+1$. Mennyi a értéke? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

Megoldás: Mivel a logaritmus alapja 1-nél kisebb, pozitív szám, a függvény szigorúan monoton csökkenő. $-3 = \log_{\frac{1}{7}} 343 < \log_{\frac{1}{7}} 143 < \log_{\frac{1}{7}} 49 = -2$, $a = -3$.

17. Az a, b, c pozitív, 1-től különböző számokra $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 0$. Mennyi $(\log_a b)^3 + (\log_b c)^3 + (\log_c a)^3$ értéke?

Megoldás: $x = \log_a b,\ y = \log_b c,$ ekkor $\log_c a = -(x+y)$.

Ki kell számolnunk $x^3 + y^3 - (x+y)^3$ értékét. $x^3 + y^3 - (x+y)^3 = -3xy(x+y)$.

Mivel $-xy(x+y) = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1,$ így a válasz 3.

18. Az x, y és z 1-től különböző pozitív számokra és a $w > 0$ számra $\log_x w = 6,\ \log_y w = 10$ és $\log_{xyz} w = 3.$ Mennyi $\log_z w$ értéke?

Megoldás: $\log_w xyz = \log_w x + \log_w y + \log_w z$ és a $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ azonosságok alapján: $\dfrac{1}{\log_{xyz} w} = \dfrac{1}{\log_x w} + \dfrac{1}{\log_y w} + \dfrac{1}{\log_z w}$, azaz $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{\log_z w}$, így $\log_z w = 15$.

19. Egy derékszögű háromszög két befogója a és b, átfogója c, $c + b \neq 1,\ c - b \neq 1$. Igazolja, hogy $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \cdot \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$

Megoldás: A $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a$ összeg az $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ azonossággal átalakítva:
$$\frac{1}{\log_a(c+b)} + \frac{1}{\log_a(c-b)} = \frac{\log_a(c-b) + \log_a(c+b)}{\log_a(c+b)\cdot\log_a(c-b)} = \frac{\log_a\left(c^2 - b^2\right)}{\log_a(c+b)\cdot\log_a(c-b)}.$$
Mivel $c^2 - b^2 = a^2$, így $\dfrac{\log_a a^2}{\log_a(c+b)\cdot\log_a(c-b)} = \dfrac{2}{\log_a(c+b)\cdot\log_a(c-b)}$. A jobb oldal másképp írva: $2 \cdot \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$

Ezzel beláttuk, hogy $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \cdot \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$

20. $a^2+b^2=7ab,\ a>0,\ b>0.$ Igazolja, hogy $\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$.

Megoldás: $a^2+b^2=7ab$ miatt $a^2+b^2+2ab=9ab$, azaz $(a+b)^2=9ab$, illetve $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab$. Vegyük mindkét oldal logaritmusát: $2\cdot\lg\frac{a+b}{3}=\lg ab$, azaz $\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$.

IV. Ellenőrző feladatok

1. Mennyi az alábbi kifejezések értéke? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

a) $\log_2 0{,}25$ **b)** $\log_{1/9} 3$ **c)** $\log_3 \frac{1}{27}$ **d)** $\log_{1/3} 3\sqrt{3}$

e) $\log_{36} 6$ **f)** $\log_{25} 125$ **g)** $\log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6}$ **h)** $\log_{1/16} \frac{1}{4}$

i) $2^{\log_4 9}$ **j)** $3^{\log_{27} 125}$ **k)** $4^{\log_2 \sqrt{7}}$ **l)** $2^{\log_{\sqrt{2}} 5}$

2. **a)** Mennyi a $\lg 1+\lg 2+\lg 4+\lg 5+\lg 10+\lg 20+\lg 25+\lg 50+\lg 100$ összeg értéke?

b) Mennyi a $(\log_2 3)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot(\log_{30} 31)\cdot(\log_{31} 32)$ szorzat értéke?

(Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

3. Mennyi az alábbi kifejezések értéke? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

a) $2^{\log_8 27}$ **b)** $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

c) $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$ **d)** $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+9^{\frac{1}{\log_8 3}}}$

4. **a)** Legyen $a=\log_6 18$. Fejezze ki a segítségével $\log_6 54$ értékét!

b) Fejezze ki $\log_{30} 8$ értékét $a=\log_{30} 3$ és $b=\log_{30} 5$ segítségével!

c) Fejezze ki $\log_6 16$ értékét $p=\log_{12} 2$ segítségével!

d) Fejezze ki $\log_{25} 4$ értékét $a=\log_2 3$ és $b=\log_3 5$ segítségével!

5. Ha $p = \frac{1}{4}$, akkor mennyi $-p \cdot \log_2 p$ értéke?

6. Igazolja, hogy $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_4 6} + \frac{1}{\log_5 6} > 2$. (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével igazolja az állítást.)

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Mennyi az alábbi kifejezések értéke? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

a) $\log_2 0{,}25$ **b)** $\log_{1/9} 3$ **c)** $\log_3 \frac{1}{27}$ **d)** $\log_{1/3} 3\sqrt{3}$

e) $\log_{36} 6$ **f)** $\log_{25} 125$ **g)** $\log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6}$ **h)** $\log_{1/16} \frac{1}{4}$

i) $2^{\log_4 9}$ **j)** $3^{\log_{27} 125}$ **k)** $4^{\log_2 \sqrt{7}}$ **l)** $2^{\log_{\sqrt{2}} 5}$

Megoldás:

a) -2 **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** -3 **d)** $-1{,}5$

e) $0{,}5$ **f)** $1{,}5$ **g)** -2 **h)** $\frac{1}{2}$

i) 3 **j)** 5 **k)** 7 **l)** 25

2. **a)** Mennyi a $\lg 1 + \lg 2 + \lg 4 + \lg 5 + \lg 10 + \lg 20 + \lg 25 + \lg 50 + \lg 100$ összeg értéke?
b) Mennyi a $(\log_2 3) \cdot (\log_3 4) \cdot (\log_4 5) \cdot \ldots \cdot (\log_{30} 31) \cdot (\log_{31} 32)$ szorzat értéke?
(Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

Megoldás: a) Vegyük a 100 osztópárjait és alkalmazzuk a $\log a + \log b = \log ab$ azonosságot.

$$(\lg 1 + \lg 100) + (\lg 2 + \lg 50) + (\lg 4 + \lg 25) + (\lg 5 + \lg 20) + \lg 10 =$$
$$= \lg(1 \cdot 100) + \lg(2 \cdot 50) + \lg(4 \cdot 25) + \lg(5 \cdot 20) + \lg 10 =$$
$$= \lg 100 + \lg 100 + \lg 100 + \lg 100 + \lg 10 =$$
$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9.$$

b) A $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ azonosság alapján $\log_2 3 = \dfrac{\lg 3}{\lg 2}$. Így a kifejezést átalakítjuk:

$$(\log_2 3)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot(\log_{30} 31)\cdot(\log_{31} 32) = \frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\lg 31}{\lg 30}\cdot\frac{\lg 32}{\lg 31} = \frac{\lg 32}{\lg 2}.$$

Használjuk a $\log a^n = n\cdot\log a$ azonosságot: $\dfrac{\lg 32}{\lg 2} = \dfrac{\lg 2^5}{\lg 2} = \dfrac{5\cdot\lg 2}{\lg 2} = 5.$

3. Mennyi az alábbi kifejezések értéke? (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével keresse meg a választ.)

a) $2^{\log_8 27}$ **b)** $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

c) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$ **d)** $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 9^{\frac{1}{\log_8 3}}}$

Megoldás: a) $\log_8 27 = \dfrac{\lg 27}{\lg 8} = \dfrac{\lg 3^3}{\lg 2^3} = \dfrac{3\lg 3}{3\lg 2} = \dfrac{\lg 3}{\lg 2} = \log_2 3$, tehát $2^{\log_8 27} = 2^{\log_2 3} = 3$.

b) 2; **c)** 24; **d)** 10.

4. **a)** Legyen $a = \log_6 18$. Fejezze ki a segítségével $\log_6 54$ értékét!

b) Fejezze ki $\log_{30} 8$ értékét $a = \log_{30} 3$ és $b = \log_{30} 5$ segítségével.

c) Fejezze ki $\log_6 16$ értékét $p = \log_{12} 2$ segítségével.

d) Fejezze ki $\log_{25} 4$ értékét $a = \log_2 3$ és $b = \log_3 5$ segítségével.

Megoldás: a) $\log_6 54 = 2a - 1$; **b)** $\log_{30} 8 = 3(1 - a - b)$; **c)** $\log_6 16 = \dfrac{4p}{1-p}$;

d) $\log_{25} 4 = \dfrac{1}{ab}$.

5. Ha $p = \dfrac{1}{4}$, akkor mennyi $-p\cdot\log_2 p$ értéke?

Megoldás: $\dfrac{1}{2}$

6. Igazolja, hogy $\frac{1}{\log_2 6}+\frac{1}{\log_4 6}+\frac{1}{\log_5 6}>2$. (Számológép használata nélkül, az azonosságok segítségével igazolja az állítást.)

Megoldás: $\frac{1}{\log_2 6}+\frac{1}{\log_4 6}+\frac{1}{\log_5 6}=\log_6 2+\log_6 4+\log_6 5=\log_6 40>\log_6 36=2$.