



TÁMOP-3.1.4-08/2-2009-0011

„A kompetencia alapú oktatás feltételeinek megteremtése Vas megye közoktatási intézményeiben”

Feladatok a logaritmus témaköréhez 11. osztály, középszint

Vasvár, 2010. május

összeállította: Nagy András



A projekt az Európai Unió támogatásával,
az Európai Regionális Fejlesztési Alap
társfinanszírozásával valósul meg.

Feladatok a logaritmus témaköréhez – 11. osztály

- 1) Írd fel a következő egyenlőségeket hatványalakban!
- a) $\log_3 9 = 2$;
 - b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$;
 - c) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$;
 - d) $\lg 10 = 1$;
 - e) $\lg \frac{1}{10} = -1$;
 - f) $\log_5 0,04 = -2$;
 - g) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$;
 - h) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = -2$.
- 2) Írd fel a következő egyenlőségeket logaritmus segítségével!
- a) $7^2 = 49$;
 - b) $3^5 = 243$;
 - c) $2^{-3} = \frac{1}{8}$;
 - d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$;
 - e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 64$;
 - f) $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$;
 - g) $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$;
 - h) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$.
- 3) Számítsd ki a következő kifejezések értékét!
- a) $\lg 1000$;
 - b) $\lg \sqrt{100}$;
 - c) $\log_5 1$;
 - d) $\log_1 3$;
 - e) $\log_2 (-4)$;
 - f) $\log_{\frac{1}{7}} 49$;
 - g) $\log_3 0$;
 - h) $\log_{\sqrt{2}} 2$.

4) Oldd meg az egyenleteket!

a) $\log_2 a = 4$;

b) $\lg b = -3$;

c) $\log_{\frac{1}{3}} c = 2$;

d) $\log_{\sqrt{7}} d = 4$;

e) $\log_{\frac{2}{3}} e = -1$;

f) $\log_{0,2} f = -1$;

g) $\log_3 g = \frac{2}{3}$;

h) $\log_5 h = -\frac{1}{2}$.

5) Határozd meg a logaritmus alapját!

a) $\log_a 27 = 3$;

b) $\log_b \frac{1}{4} = 2$;

c) $\log_c \sqrt{7} = -1$;

d) $\log_d 5 = \frac{1}{2}$;

e) $\log_e 0,25 = 2$;

f) $\log_f 3 = 0$;

g) $\log_g 2 = \frac{2}{3}$;

h) $\log_h \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$.

6) Számítsd ki a következő kifejezések számértékét

a) $2^{\log_2 4}$;

b) $10^{\lg 8}$;

c) $5^{\log_5 (-5)}$;

d) $\left(\frac{4}{7}\right)^{\log_{\frac{4}{7}} 5}$;

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3}$;

f) $3^{2\log_3 5}$;

g) $9^{\log_3 2}$;

h) $7^{\log_{49} 3}$;

7) Határozd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\log_2 (2x - 7)$;

b) $\lg (2x + 6) + \lg (5 - x)$;

c) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5 - 3x}$;

d) $\log_5 |5 - 2x|$;

- e) $\lg(x-4)^2$;
- f) $\log_2 \frac{3}{2x-7}$;
- g) $\log_7(x^2-8x+12)$;
- h) $\lg \frac{x^2-4}{1-x}$.

8) Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!

- a) $f(x) = \log_3 x$;
- b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$;
- c) $f(x) = \log_2(x+3)$;
- d) $f(x) = 2 \cdot \log_3 x$;
- e) $f(x) = -\log_2(x+1)$;
- f) $f(x) = \log_3(2x)$;
- g) $f(x) = 2 \cdot \log_3(x+2) + 3$;
- h) $f(x) = \log_2(x-1) - 2$, ha $x \in [-1;9]$.

9) Melyik nagyobb?

- a) $\log_3 13$ vagy $\log_3 16$;
- b) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ vagy $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$;
- c) $\log_{0,2} 4$ vagy $\log_{0,2} 5$;
- d) $\log_7 \frac{3}{4}$ vagy $\log_7 \frac{3}{5}$;
- e) $\log_{\frac{4}{11}} \frac{13}{6}$ vagy $\log_{\frac{4}{11}} \frac{19}{9}$;
- f) $\log_3 2$ vagy $\log_2 3$.

10) Oldd meg grafikusán a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

- a) $\log_3 x = 2$;
- b) $\log_2 x = -x + 3$;
- c) $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;
- d) $\log_3 x + 1 = \sqrt{x}$
- e) $\log_4 x = x^2 + 1$;
- f) $\log_2(x+3) = |x-1| - 1$;
- g) $2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x = x - 1$;
- h) $\log_3 x = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1$.

11) Írd fel a következő kifejezések logaritmusát, a benne szereplő változók és számok logaritmusainak segítségével!

- a) $x = 5bc$;
- b) $x = a^2b$;

- c) $x = \frac{3ab}{2}$;
- d) $x = \frac{abc}{4T}$;
- e) $x = \frac{a^2 - ab}{2bc}$;
- f) $x = \frac{4r^3\pi}{3}$;
- g) $x = a\sqrt[3]{b}$;
- h) $x = \frac{\sqrt[5]{a}}{b^3}$.

12) Fejzd ki x -et a következő egyenlőségekből!

- a) $\lg x = \lg 2,4 + \lg 15$;
- b) $\lg x = \lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \lg 4 + \lg 5$;
- c) $\lg x = 2 \cdot \lg 12 - \lg 18$;
- d) $\lg x = -2 \cdot \lg 7 + 3 \cdot \lg 2$;
- e) $\lg x = \frac{1}{2} \cdot \lg 20 - \frac{1}{2} \cdot \lg 5$;
- f) $\lg x = \frac{3}{2} \cdot \lg 9 - \lg 3 - \frac{1}{2} \cdot \lg 81$;
- g) $\lg x = \frac{2}{3} \cdot \lg 8 - \frac{1}{3} \cdot \lg 27 + 2 \cdot \lg 5$;
- h) $\lg x = \frac{1}{2} \cdot \lg 12 + \lg 4 - \frac{1}{2} \cdot \lg 4 + \frac{1}{2} \cdot \lg 3$.

13) Fejzd ki x -et a következő egyenlőségekből!

- a) $\lg x = \lg a + \lg b$;
- b) $\lg x = \lg a + \lg b - \lg c$;
- c) $\lg x = \lg a - \lg b - \lg c - \lg d$;
- d) $\lg x = 2 \cdot \lg a + 3 \cdot \lg b$;
- e) $\lg x = \frac{1}{3} \cdot \lg a + \frac{1}{2} \cdot \lg b$;
- f) $\lg x = 0,5 \cdot \lg a - \frac{3}{2} \cdot \lg b$;
- g) $\lg x = \frac{2}{3} \cdot (\lg a - \lg b)$;
- h) $\lg x = \lg (a - b)$.

14) Határozd meg a következő kifejezések számértékét!

- a) $\lg 25 + \lg 4$;
- b) $\log_7 21 - \log_7 3$;
- c) $2 \cdot \log_6 2 + \log_6 27 - \log_6 3$;
- d) $3 \cdot \log_7 7 + 3 \cdot \log_3 27$;
- e) $\lg \sqrt{676} + \lg \sqrt{25} - \lg 13$;
- f) $2 \cdot \lg 2 + 6 \cdot \lg \sqrt{5} + \lg 18 - 2 \cdot \lg 3$;

- g) $\log_{\sqrt{12}} 4 + \log_{\sqrt{12}} 3 - \log_{\sqrt{12}} 9 - \log_{\sqrt{12}} 16 + 2 \cdot \log_{\sqrt{12}} 12$;
 h) $\log_3 27 \cdot \log_2 1024$.

15) Határozd meg a következő hatványok számértékét!

- a) $10^{-\lg 5}$;
 b) $3^{3+\log_3 2}$;
 c) $10^{1-\lg 5}$;
 d) $100^{1-\lg \frac{5}{2}}$;
 e) $3^{\log_3 2 + \log_3 1}$;
 f) $5^{\log_5 14 - \log_5 7}$;
 g) $0,25^{\log_2 3 - \log_2 4}$;
 h) $11^{\log_{\sqrt{11}} 2 + \log_{121} 2}$.

16) Oldd meg az alábbi egyenleteket!

- a) $\lg x = \lg 23$;
 b) $\log_3 (x + 2) = \log_3 (3x - 1)$;
 c) $\log_{\sqrt{2}} x^2 = \log_{\sqrt{2}} (10x - 24)$;
 d) $\frac{\log_2 (x + 3)}{\log_2 (2x + 3)} = 1$;
 e) $\log_{\frac{1}{3}} x^2 = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x$;
 f) $\frac{\lg(5 - x)}{\lg(x - 1)} = 2$;
 g) $\log_3 \sqrt{x + 1} = \log_3 (x + 3)$;
 h) $\lg |x + 1| = \lg (2x + 3)$.

17) Oldd meg az alábbi egyenleteket!

- a) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$;
 b) $\log_7 (x - 4) = 3$;
 c) $\log_9 |5 - 3x| = \frac{1}{2}$;
 d) $\log_2 (2x + 3) = -1$;
 e) $\log_3 (x^2 - 6x + 8) = 1$;
 f) $\log_{81} \sqrt{5 - 3x} = -\frac{1}{2}$;
 g) $\log_{x+1} (2x + 8) = 2$;
 h) $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$.

18) Oldd meg az alábbi egyenleteket!

- a) $\lg x = \lg 2 + \lg 6$;
 b) $2 - \log_3 x = \log_3 2 + \log_3 4 + \log_3 5$;
 c) $\log_7 (x - 5) + 2 = \log_7 (3 - x) - \log_7 x$;
 d) $\log_{11} (x - 1) + \log_{11} (x + 1) = \log_{11} (x - 2) + \log_{11} 8$;
 e) $\lg (x - 4) + \lg (x + 3) = \lg (5x + 4)$;

$$f) 2 \cdot \log_5 (2x + 1) = \frac{1}{2} \cdot \log_5 (x^2 + 8x + 16);$$

$$g) \lg \sqrt{5x-8} + \frac{1}{2} \cdot \lg (2x + 3) = \frac{1}{2} \cdot \lg 36;$$

$$h) \frac{\log_2 1}{\log_2 (x+3)} = \log_2 (x-7).$$

19) Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_2 x + \log_4 x = 3;$

b) $\log_5 (x + 1) + \log_{25} (x + 1) = 1,5;$

c) $\log_3 x - \log_{\sqrt{3}} x = 1;$

d) $\log_x 3 + \log_3 x = 2.$

20) Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\log_7 (x + 3) > \log_7 (2x + 1);$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 5) \geq \log_{\frac{1}{2}} (6 - x);$

c) $\log_3 (7 + x) + \log_3 (x - 3) \leq \log_3 (2x + 3);$

d) $\log_{27} (7x - 1) < \frac{1}{3};$

e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3-x}{2x+1} < 0.$

21) Oldd meg az alábbi feladatokat!

a) Egy bankba 200000 forintot helyezünk el 6%-os éves kamatra. Változatlan kamat mellett legalább hány év telik el, mire 350000 forintunk lesz?

b) Egy fénymásoló beszerzési ára 140000 forint. A gép értéke 10%-kal csökken évente. A gép értéke hány év múlva éri az új árának csupán 60 %-át?

Megoldások

1)

a. $3^2 = 9$;

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$;

c. $27^{\frac{1}{3}} = 3$;

d. $10^1 = 10$;

e. $10^{-1} = \frac{1}{10}$;

f. $5^{-2} = 0,04$ ($0,04 = \frac{1}{25}$);

g. $27^{\frac{2}{3}} = 9$;

h. $\sqrt{3}^{-2} = \frac{1}{3}$.

2)

a. $\log_7 49 = 2$;

b. $\log_3 243 = 5$;

c. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$;

d. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} = 2$;

e. $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$;

f. $\log_3 \sqrt[3]{9} = \frac{2}{3}$;

g. $\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$;

h. $\log_{\frac{1}{2}} 0,125 = 3$ ($0,125 = \frac{1}{8}$).

3)

a. $\lg 1000 = 3$, mert $10^3 = 1000$;

b. $\lg \sqrt{100} = 1$, mert $10^1 = \sqrt{100} = 10$;

c. $\log_5 1 = 0$, mert $5^0 = 1$;

d. $\log_1 3$ nem értelmezhető, mert $1^x = 1$ ($x \in \mathbb{R}$);

e. $\log_2 (-4)$ nem értelmezhető, mert $2^x > 0$ ($x \in \mathbb{R}$);

f. $\log_{\frac{1}{7}} 49 = -2$, mert $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = 49$;

g. $\log_3 0$ nem értelmezhető, mert $3^x > 0$ ($x \in \mathbb{R}$);

h. $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$, mert $\sqrt{2}^2 = 2$.

4)

- a. $a = 2^4 = 16$;
- b. $b = 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$;
- c. $c = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$;
- d. $d = \sqrt{7^4} = 49$;
- e. $e = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$;
- f. $f = 0,2^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$;
- g. $g = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$;
- h. $h = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5)

- a. $a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$;
- b. $b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$;
- c. $c^{-1} = \sqrt{7} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{7}}$;
- d. $d^{\frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow d = 25$;
- e. $e^2 = 0,25 \Rightarrow e = \frac{1}{2}$;
- f. nem értelmezhető, mert $f^0 = 1 \neq 3$ ($f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);
- g. $g^{\frac{2}{3}} = 2 \Rightarrow g = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$;
- h. $h^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \Rightarrow h = \frac{4}{25}$.

6)

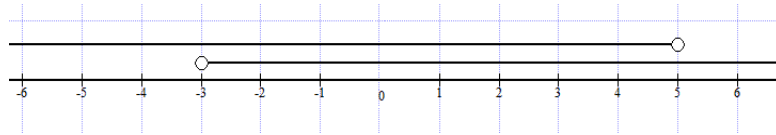
- a. $2^{\log_2 4} = 4$;
- b. $10^{\lg 8} = 8$;
- c. $5^{\log_5(-5)}$ nem értelmezhető, mert a logaritmus csak pozitív számokra értelmezett;
- d. $\left(\frac{4}{7}\right)^{\log_4 5} = 5$;
- e. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3} = (2^{-1})^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$;
- f. $3^{2 \cdot \log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25$;
- g. $9^{\log_3 2} = (3^2)^{\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^2 = 2^2 = 4$;

$$h. 7^{\log_{49} 3} = \left(49^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{49} 3} = \left(49^{\log_{49} 3}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

7)

$$a. (2x - 7) > 0 \Rightarrow x > \frac{7}{2}. \text{É.T.: } x \in \left] \frac{7}{2}; \infty \right[;$$

$$b. (2x + 6) > 0 \Rightarrow -3 < x \text{ és } (5 - x) > 0 \Rightarrow x < 5. \text{É.T.: } x \in]-3; 5[;$$



$$c. \sqrt{5 - 3x} > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{3}. \text{É.T.: } x \in \left] -\infty; \frac{5}{3} \right[;$$

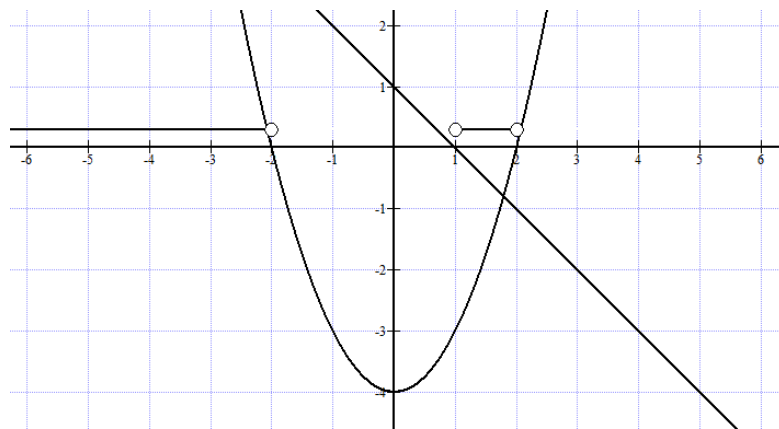
$$d. |5 - 2x| > 0 \Rightarrow x \neq \frac{5}{2}. \text{É.T.: } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\};$$

$$e. (x - 4)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 4. \text{É.T.: } x \in \mathbb{R} \setminus \{4\};$$

$$f. \frac{3}{2x - 7} > 0 \Rightarrow 2x - 7 > 0 \Rightarrow \frac{7}{2} < x. \text{É.T.: } x \in \left] \frac{7}{2}; \infty \right[;$$

$$g. x^2 - 8x + 12 > 0 \Rightarrow x < 2 \text{ vagy } 6 < x. \text{É.T.: } x \in]-\infty; 2[\cup]6; \infty[;$$

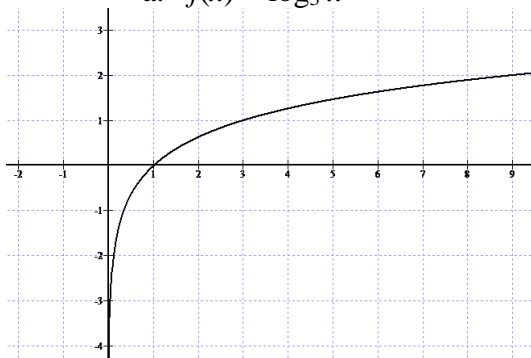
$$h. \frac{x^2 - 4}{1 - x} > 0 \Rightarrow 1. \text{ eset: } x^2 - 4 > 0 \text{ és } 1 - x > 0 \Rightarrow -2 < x.$$



$$2. \text{ eset: } x^2 - 4 < 0 \text{ és } 1 - x < 0 \Rightarrow 1 < x < 2. \\ \text{É.T.: } x \in]-\infty; -2[\cup]1; 2[.$$

8)

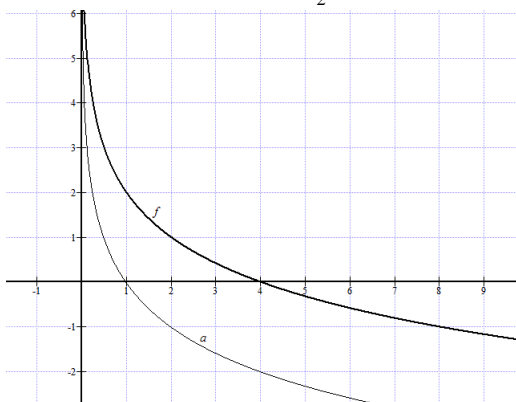
a. $f(x) = \log_3 x$



É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$
Zérushely: $x = 1$
Szélsőérték: nincs

É.K.: $y \in \mathbb{R}$
Monotonitás: szig. monoton növény
Paritás: nem páros, nem páratlan

b. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$

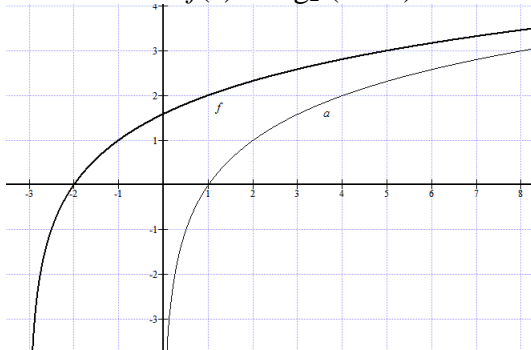


É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$
Zérushely: $x = 4$
Szélsőérték: nincs

Transzformációs lépések:
 $a(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, az alapfüggvény ábrázolása
 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$, a grafikonjának eltolása +2
egységgel az y tengely mentén $v(0;2)$

É.K.: $y \in \mathbb{R}$
Monotonitás: szig. monoton csökkenő
Paritás: nem páros, nem páratlan

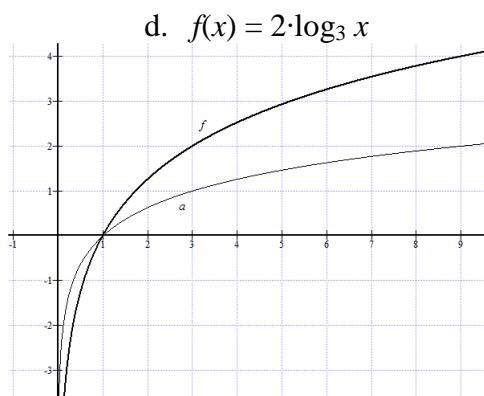
c. $f(x) = \log_2(x + 3)$



É.T.: $x \in]-3; \infty[$
Zérushely: $x = -2$
Szélsőérték: nincs

Transzformációs lépések:
 $a(x) = \log_2 x$, az alapfüggvény ábrázolása
 $f(x) = \log_2(x + 3)$, a grafikonjának eltolása -3
egységgel az x tengely mentén $v(-3;0)$

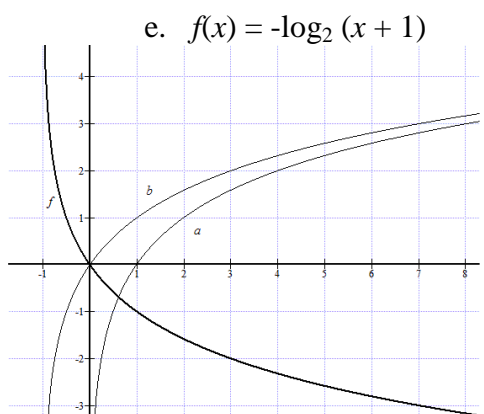
É.K.: $y \in \mathbb{R}$
Monotonitás: szig. monoton növény
Paritás: nem páros, nem páratlan



É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$
 Zérushely: $x = 1$
 Szélsőérték: nincs

Transzformációs lépések:
 $a(x) = \log_3 x$, az alapfüggvény ábrázolása
 $f(x) = 2 \cdot \log_3 x$, a grafikonjának kétszeres
 nyújtása az y tengely mentén

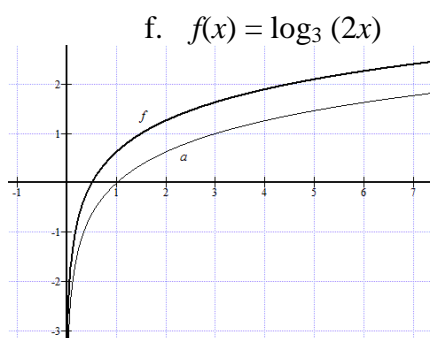
É.K.: $y \in \mathbb{R}$
 Monotonitás: szig. monoton növény
 Paritás: nem páros, nem páratlan



É.T.: $x \in]-1; \infty[$
 Zérushely: $x = 0$
 Szélsőérték: nincs

Transzformációs lépések:
 $a(x) = \log_2 x$, az alapfüggvény ábrázolása
 $b(x) = \log_2(x + 1)$, a grafikonjának eltolása
 -1 egységgel az x tengely mentén
 $v(-1;0)$
 $f(x) = -\log_2(x + 1)$, b grafikonjának tükrözése
 az x tengelyre

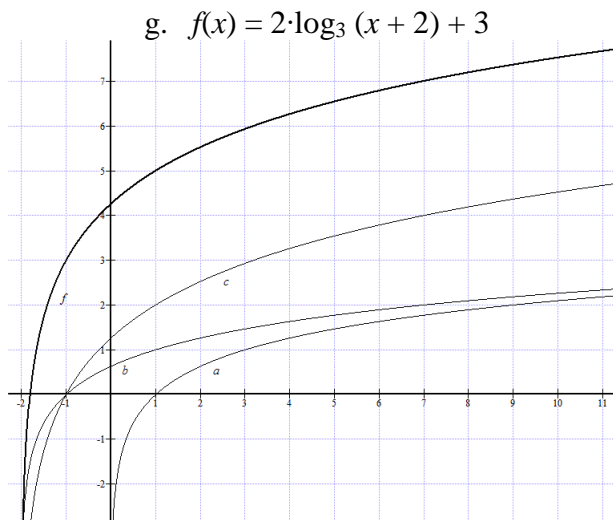
É.K.: $y \in \mathbb{R}$
 Monotonitás: szig. monoton csökkenő
 Paritás: nem páros, nem páratlan



É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$
 Zérushely: $x = \frac{1}{2}$
 Szélsőérték: nincs

Transzformációs lépések:
 $a(x) = \log_3 x$, az alapfüggvény ábrázolása
 $f(x) = \log_3(2x)$, a grafikonjának $\frac{1}{2}$ -szeres
 zsugorítása az x tengely mentén

É.K.: $y \in \mathbb{R}$
 Monotonitás: szig. monoton növény
 Paritás: nem páros, nem páratlan



Transzformációs lépések:

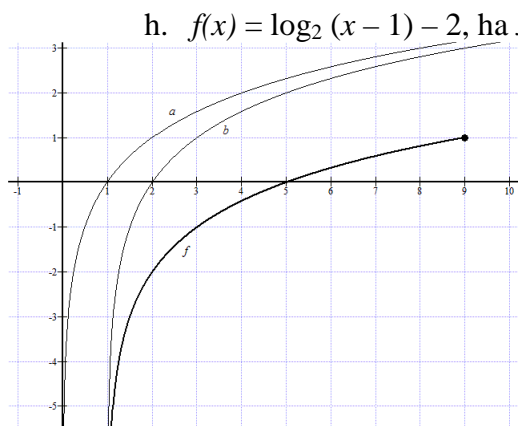
$a(x) = \log_3 x$, az alapfüggvény ábrázolása
 $b(x) = \log_3(x+2)$, a grafikon eltolása -2
 egységgel az x tengely mentén $\mathbf{v}(-2;0)$

$c(x) = 2 \cdot \log_3(x+2)$, b grafikonjának
 kétszeres nyújtása az y tengely
 mentén

$f(x) = 2 \cdot \log_3(x+2) + 3$, c grafikonjának
 eltolása az y tengely mentén +3
 egységgel $\mathbf{v}(0;3)$

É.T.: $x \in]-2; \infty[$
 Zérushely: $x \approx -1,8$
 Szélsőérték: nincs

É.K.: $y \in \mathbb{R}$
 Monotonitás: szig. monoton növő
 Paritás: nem páros, nem páratlan



Transzformációs lépések:

$a(x) = \log_2 x$, az alapfüggvény ábrázolása
 $b(x) = \log_2(x-1)$, a grafikonjának eltolása 1
 egységgel az x tengely mentén $\mathbf{v}(1;0)$

$f(x) = \log_2(x-1) - 2$, b grafikonjának
 eltolása -2 egységgel az y tengely
 mentén $\mathbf{v}(0;-2)$

É.T.: $x \in]1;9]$
 Zérushely: $x = 5$
 Szélsőérték: minimum nincs
 maximum hely: $x = 9$
 maximum érték: $y = 1$

É.K.: $y \in]-\infty;1]$
 Monotonitás: szig. monoton növő
 Paritás: nem páros, nem páratlan

9)

- A logaritmus alapja nagyobb mint 1, tehát a függvény szigorúan monoton növő
 $13 < 16 \Rightarrow \log_3 13 < \log_3 16$;
- A logaritmus alapja 0 és 1 közti, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő
 $3 > \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$;
- A logaritmus alapja 0 és 1 közti, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő
 $4 < 5 \Rightarrow \log_{0,2} 4 > \log_{0,2} 5$;
- A logaritmus alapja nagyobb mint 1, tehát a függvény szigorúan monoton növő
 $\frac{3}{4} > \frac{3}{5} \Rightarrow \log_7 \frac{3}{4} > \log_7 \frac{3}{5}$;

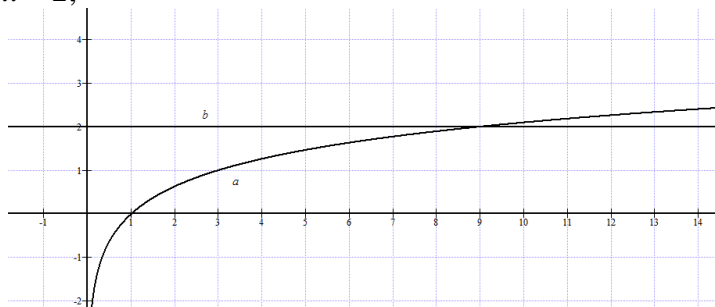
e. A logaritmus alapja 0 és 1 közti, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő

$$\frac{13}{6} > \frac{19}{9} \Rightarrow \log_{\frac{4}{11}} \frac{13}{6} < \log_{\frac{4}{11}} \frac{19}{9};$$

f. $\log_3 2 < 1$ és $\log_2 3 > 1 \Rightarrow \log_3 2 < \log_2 3$.

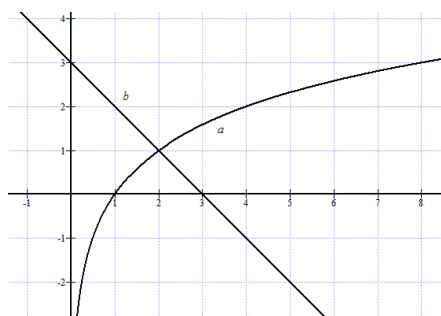
10) Az egyenletek bal oldalából képezzük az $a(x)$ függvényt, jobb oldalából a $b(x)$ függvényt, majd ábrázoljuk grafikonjukat közös koordináta-rendszerben.

a. $\log_3 x = 2$;



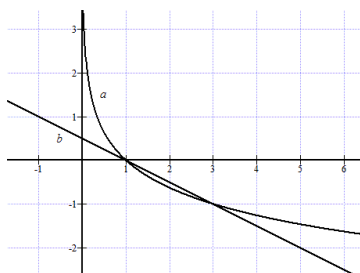
Az ábráról leolvasható megoldás: $x = 9$, más megoldás nincs.

b. $\log_2 x = -x + 3$;



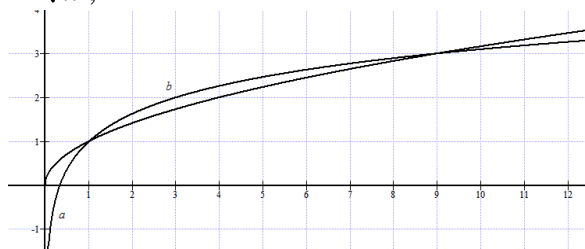
Az ábráról leolvasható megoldás: $x = 2$, más megoldás nincs.

c. $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;



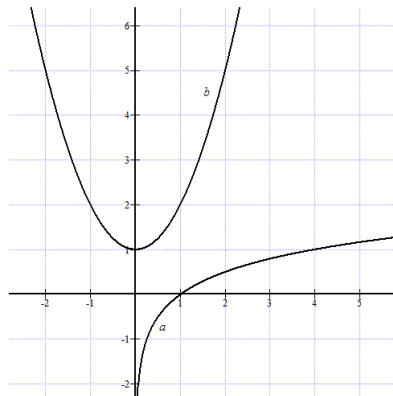
Az ábráról leolvasható megoldások: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, más megoldás nincs.

d. $\log_3 x + 1 = \sqrt{x}$;



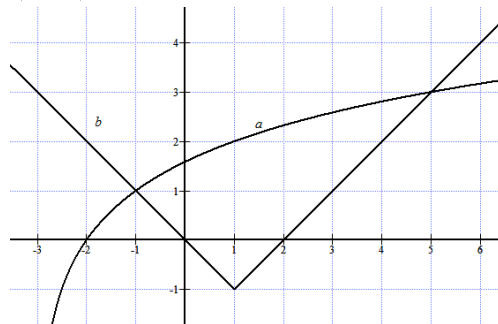
Az ábráról leolvasható megoldások: $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, más megoldás nincs.

e. $\log_4 x = x^2 + 1$;



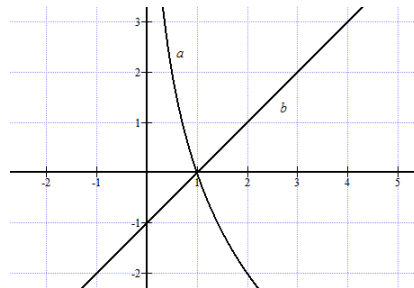
A grafikonoknak nincs közös pontja, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

f. $\log_2(x + 3) = |x - 1| - 1$;



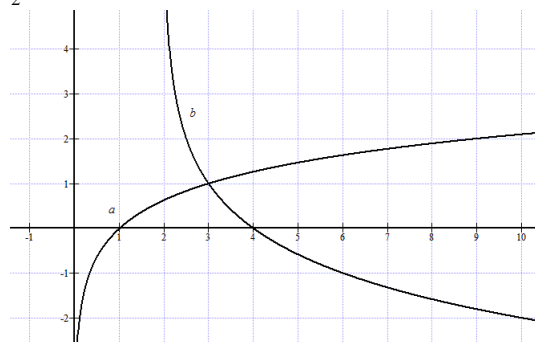
Az ábráról leolvasható megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, más megoldás nincs.

g. $2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x = x - 1$;



Az ábráról leolvasható megoldás: $x = 1$, más megoldás nincs.

h. $\log_3 x = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) + 1$.



Az ábráról leolvasható megoldás: $x = 3$, más megoldás nincs.

11) A kifejezésekben a változók pozitív valós számok, és a logaritmus alapja $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

- $\log_k x = \log_k 5 + \log_k b + \log_k c$;
- $\log_k x = 2 \cdot \log_k a + \log_k b$;
- $\log_k x = \log_k 3 + \log_k a + \log_k b - \log_k 2$;
- $\log_k x = \log_k a + \log_k b + \log_k c - \log_k 4 - \log_k T$;
- $\log_k x = \log_k a + \log_k (a - b) - \log_k 2 - \log_k b - \log_k c$;
- $\log_k x = \log_k 4 + 3 \cdot \log_k r + \log_k \pi - \log_k 3$;
- $\log_k x = \log_k a + \frac{1}{3} \cdot \log_k b$;
- $\log_k x = \frac{1}{5} \cdot \log_k a - 3 \cdot \log_k b$.

12)

- $\lg x = \lg (2,4 \cdot 15) = \lg 36 \Rightarrow x = 36$;
- $\lg x = \lg (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = \lg 5! = \lg 120 \Rightarrow x = 120$;
- $\lg x = \lg \frac{12^2}{18} = \lg \frac{144}{18} = \lg 8 \Rightarrow x = 8$;
- $\lg x = \lg (7^2 \cdot 2^3) = \lg \frac{8}{49} \Rightarrow x = \frac{8}{49}$;
- $\lg x = \lg \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \lg \sqrt{\frac{20}{5}} = \lg \sqrt{4} = \lg 2 \Rightarrow x = 2$;
- $\lg x = \lg \frac{\sqrt{9^3}}{3 \cdot \sqrt{81}} = \lg \frac{27}{3 \cdot 9} = \lg 1 \Rightarrow x = 1$;
- $\lg x = \lg \frac{\sqrt[3]{8^2} \cdot 5}{\sqrt[3]{27}} = \lg \frac{4 \cdot 25}{3} \Rightarrow x = \frac{100}{3}$;
- $\lg x = \lg \frac{\sqrt{12} \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \lg \frac{\sqrt{36} \cdot 4}{2} = \lg 12 \Rightarrow x = 12$.

13) A kifejezésekben a változók pozitív valós számok,

- $\lg x = \lg ab \Rightarrow x = ab$;
- $\lg x = \lg \frac{ab}{c} \Rightarrow x = \frac{ab}{c}$;
- $\lg x = \lg \frac{a}{bcd} \Rightarrow x = \frac{a}{bcd}$;
- $\lg x = \lg a^2 b^3 \Rightarrow x = a^2 b^3$;
- $\lg x = \lg \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} \Rightarrow x = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b}$;
- $\lg x = \lg \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^3}} = \lg \sqrt{\frac{a}{b^3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a}{b^3}}$;
- $\lg x = \frac{2}{3} \cdot \lg a - \frac{2}{3} \cdot \lg b = \lg \sqrt[3]{a^2} - \lg \sqrt[3]{b^2} = \lg \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}} = \lg \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$;
- $\lg x = \lg (a - b) \Rightarrow x = a - b, (a > b)$.

14)

- a. $\lg 25 + \lg 4 = \lg 100 = 2$;
- b. $\log_7 21 - \log_7 3 = \log_7 \frac{21}{3} = \log_7 7 = 1$;
- c. $2 \cdot \log_6 2 + \log_6 27 - \log_6 3 = \log_6 \frac{2^2 \cdot 27}{3} = \log_6 36 = 2$;
- d. $3 \cdot \log_7 7 + 3 \cdot \log_3 27 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 12$;
- e. $\lg \sqrt{676} + \lg \sqrt{25} - \lg 13 = \lg \frac{\sqrt{676} \cdot \sqrt{25}}{13} = \lg \frac{\sqrt{16900}}{13} = \lg 10 = 1$;
- f. $2 \cdot \lg 2 + 6 \cdot \lg \sqrt{5} + \lg 18 - 2 \cdot \lg 3 = \lg \frac{2^2 \cdot \sqrt{5}^6 \cdot 18}{3^2} = \lg \frac{4 \cdot 125 \cdot 18}{9} =$
 $= \lg 1000 = 3$;
- g. $\log_{\sqrt{12}} 4 + \log_{\sqrt{12}} 3 - \log_{\sqrt{12}} 9 - \log_{\sqrt{12}} 16 + 2 \cdot \log_{\sqrt{12}} 12 = \log_{\sqrt{12}} \frac{4 \cdot 3 \cdot 12^2}{9 \cdot 16} =$
 $= \log_{\sqrt{12}} \frac{1728}{144} = \log_{\sqrt{12}} 12 = 2$;
- h. $\log_3 27 \cdot \log_2 1024 = 3 \cdot 10 = 30$.

15)

- a. $10^{-\lg 5} = (10^{\lg 5})^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$;
- b. $3^{3+\log_3 2} = 3^3 \cdot 3^{\log_3 2} = 27 \cdot 2 = 54$;
- c. $10^{1-\lg 5} = \frac{10^1}{10^{\lg 5}} = \frac{10}{5} = 2$; vagy $10^{1-\lg 5} = 10^{\lg 10 - \lg 5} = 10^{\lg \frac{10}{5}} = 10^{\lg 2} = 2$;
- d. $100^{1-\lg \frac{5}{2}} = \frac{100^1}{100^{\lg \frac{5}{2}}} = \frac{100}{\left(10^{\lg \frac{5}{2}}\right)^2} = \frac{100}{\frac{25}{4}} = 16$;
- e. $3^{\log_3 2 + \log_3 1} = 3^{\log_3 2} \cdot 3^{\log_3 1} = 2 \cdot 1 = 2$; vagy $3^{\log_3 2 \cdot 1} = 3^{\log_3 2} = 2$;
- f. $5^{\log_5 14 - \log_5 7} = 5^{\log_5 \frac{14}{7}} = \frac{14}{7}$; vagy $\frac{5^{\log_5 14}}{5^{\log_5 7}} = \frac{14}{7} = 2$;
- g. $0,25^{\log_2 3 - \log_2 4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 3 - \log_2 4} = (2^{-2})^{\log_2 3 - \log_2 4} = (2^{\log_2 3 - \log_2 4})^{-2} = \left(2^{\log_2 \frac{3}{4}}\right)^{-2} =$
 $= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{9}$;
- h. $11^{\log_{\sqrt{11}} 2 + \log_{121} 2} = \left(\sqrt{11}^2\right)^{\log_{\sqrt{11}} 2} \cdot \left(121^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{121} 2} = \left(\sqrt{11}^{\log_{\sqrt{11}} 2}\right)^2 \cdot \left(121^{\log_{121} 2}\right)^{\frac{1}{2}} =$
 $= 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$.

16)

a. $0 < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \mathbb{R}^+$.

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x = 23$.

$x = 23 \in \text{É.T.}$, más megoldás nincs;

b. $x + 2 > 0 \Rightarrow -2 < x$ és $3x - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left] \frac{1}{3}; \infty \right[$.

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x + 2 = 3x - 1$.

Az egyenlet megoldása $x = \frac{3}{2} \in \text{É.T.}$, más megoldás nincs;

c. $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$ és $10x - 24 > 0 \Rightarrow 2,4 < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in]2,4; \infty[$.

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x^2 = 10x - 24$.

Az egyenlet megoldása $x_1 = 4$ és $x_2 = 6$, mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, azaz megoldása az egyenletnek;

d. $x + 3 > 0 \Rightarrow -3 < x$ és $2x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x$ és $\log_2(2x + 3) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left] -\frac{3}{2}; -1 \right[\cup]-1; \infty[.$$

$$\frac{\log_2(x+3)}{\log_2(2x+3)} = 1 \Rightarrow \log_2(x+3) = \log_2(2x+3).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x + 3 = 2x + 3$.

Az egyenlet megoldása $x = 0 \in \text{É.T.}$, más megoldás nincs;

e. $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$ és $x > 0 \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \mathbb{R}^+$.

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x^2 = x^2$.

Az egyenlet azonosság, megoldása $x \in \mathbb{R}^+$;

f. $5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$ és $x - 1 > 0 \Rightarrow 1 < x$ és $\lg(x - 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{É.T.: } x \in]1; 2[\cup]2; 5[$.

$$\frac{\lg(5-x)}{\lg(x-1)} = 2 \Rightarrow \lg(5-x) = \lg(x-1)^2.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $5 - x = (x - 1)^2$.

Az egyenlet megoldása $x_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \notin \text{É.T.}$ és $x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \in \text{É.T.}$, tehát a

feladat megoldása $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$;

g. $\sqrt{x+1} > 0 \Rightarrow -1 < x$ és $x + 3 > 0 \Rightarrow -3 < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in]-1; \infty[$.

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\sqrt{x+1} = (x+3)$.

Az egyenletnek nincs megoldása;

h. $|x+1| > 0 \Rightarrow x \neq -1$ és $2x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left] -\frac{3}{2}; -1 \right[\cup]-1; \infty[.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $|x+1| = 2x + 3$.

Az egyenlet megoldása $x = -\frac{4}{3} \in \text{É.T.}$, más megoldás nincs.

17)

a. $0 < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \mathbb{R}^+.$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x = \frac{1}{4}.$

$$x = \frac{1}{4} \in \text{É.T.}, \text{ más megoldás nincs;}$$

b. $x - 4 > 0 \Rightarrow 4 < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in]4; \infty[.$

$$\log_7 (x - 4) = 3 \Rightarrow \log_7 (x - 4) = \log_7 7^3.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x - 4 = 343.$

Az egyenlet megoldása $x = 347 \in \text{É.T.},$ más megoldás nincs;

c. $|5 - 3x| > 0 \Rightarrow x \neq \frac{5}{3} \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}.$

$$\log_9 |5 - 3x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_9 |5 - 3x| = \log_9 9^{\frac{1}{2}}.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $|5 - 3x| = 3.$

Az egyenlet megoldása $x_1 = \frac{2}{3}$ és $x_2 = \frac{8}{3},$ mindkét gyök eleme az értelmezési

tartománynak, azaz megoldása az egyenletnek;

d. $2x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left]-\frac{3}{2}; \infty\right[.$

$$\log_2 (2x + 3) = -1 \Rightarrow \log_2 (2x + 3) = \log_2 2^{-1}.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $2x + 3 = \frac{1}{2}.$

Az egyenlet megoldása $x = -\frac{5}{4} \in \text{É.T.},$ más megoldás nincs;

e. $x^2 - 6x + 8 > 0 \Rightarrow x < 2$ vagy $4 < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in]-\infty; 2[\cup]4; \infty[.$

(Megjegyzés: az É.T. meghatározása helyett a gyököket ellenőrizzük.)

$$\log_3 (x^2 - 6x + 8) = 1 \Rightarrow \log_3 (x^2 - 6x + 8) = \log_3 3^1.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x^2 - 6x + 8 = 3.$

Az egyenlet megoldása $x_1 = 1$ és $x_2 = 5,$ mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, azaz megoldása az egyenletnek;

f. $\sqrt{5 - 3x} > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{3} \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left]-\infty; \frac{5}{3}\right[.$

$$\log_{81} \sqrt{5 - 3x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{81} \sqrt{5 - 3x} = \log_{81} 81^{-\frac{1}{2}}.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\sqrt{5 - 3x} = \frac{1}{9}.$

Az egyenlet megoldása $x = \frac{404}{243} \in \text{É.T.},$ más megoldás nincs;

g. $2x + 8 > 0 \Rightarrow -4 < x$ és $x + 1 > 0 \Rightarrow -1 < x$ és $x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{É.T.: } x \in]-1; 0[\cup]0; \infty[.$

$$\log_{x+1} (2x + 8) = 2 \Rightarrow \log_{x+1} (2x + 8) = \log_{x+1} (x + 1)^2.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $2x + 8 = (x + 1)^2$.

Az egyenlet megoldása $x_1 = -\sqrt{7} \notin \text{É.T.}$ és $x_2 = \sqrt{7} \in \text{É.T.}$, tehát a feladat megoldása $x = \sqrt{7}$;

- h. Az É.T. meghatározása helyett a gyököket ellenőrizzük.

A logaritmus definícióját alkalmazzuk:

$$\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$$

$$\log_3 \log_4 x = 2^0$$

$$\log_4 x = 3^1$$

$$x = 4^3$$

$$x = 64.$$

Az ellenőrzést elvégezve megállapítható, hogy $x = 64$ valóban gyöke az egyenletnek.

- 18) Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

- a. $x > 0 \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \mathbb{R}^+$.

$$\lg x = \lg 2 + \lg 6 \Rightarrow \lg x = \lg 2 \cdot 6.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x = 12$.

Az egyenlet megoldása $x = 12 \in \text{É.T.}$, más megoldás nincs;

- b. $x > 0 \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \mathbb{R}^+$.

$$2 - \log_3 x = \log_3 2 + \log_3 4 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 \frac{3^2}{x} = \log_3 (2 \cdot 4 \cdot 5).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\frac{3^2}{x} = 40$.

Az egyenlet megoldása $x = \frac{9}{40} \in \text{É.T.}$, más megoldás nincs;

- c. $x - 5 > 0 \Rightarrow 5 < x$ és $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$ és $0 < x \Rightarrow \text{É.T.} = \{\}$, azaz az egyenlet egyetlen valós számra sem értelmezhető, megoldása nincs.

- d. $x - 1 > 0 \Rightarrow 1 < x$ és $x + 1 > 0 \Rightarrow -1 < x$ és $x - 2 > 0 \Rightarrow 2 < x \Rightarrow \Rightarrow \text{É.T.: } x \in]2; \infty[$.

$$\log_{11} (x - 1) + \log_{11} (x + 1) = \log_{11} (x - 2) + \log_{11} 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{11} [(x - 1)(x + 1)] = \log_{11} [(x - 2) \cdot 8].$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $(x - 1)(x + 1) = (x - 2) \cdot 8$.

Az egyenlet megoldása $x_1 = 3$ és $x_2 = 5$, mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, azaz megoldása az egyenletnek;

- e. $x - 4 > 0 \Rightarrow 4 < x$ és $x + 3 > 0 \Rightarrow -3 < x$ és $5x + 4 > 0 \Rightarrow -\frac{4}{5} < x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{É.T.: } x \in]4; \infty[$.

$$\lg (x - 4) + \lg (x + 3) = \lg (5x + 4) \Rightarrow \lg [(x - 4)(x + 3)] = \lg (5x + 4).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $(x - 4)(x + 3) = 5x + 4$.

Az egyenlet megoldása $x_1 = -2 \notin \text{É.T.}$ és $x_2 = 8 \in \text{É.T.}$, tehát a feladat megoldása $x = 8$;

- f. $2x + 1 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x$ és $x^2 + 8x + 16 > 0 \Rightarrow x \neq -4 \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left] -\frac{1}{2}; \infty \right[$.

(Megjegyzés: az É.T. meghatározása helyett a gyököket ellenőrizzük.)

$$2 \cdot \log_5 (2x + 1) = \frac{1}{2} \cdot \log_5 (x^2 + 8x + 16) \Rightarrow \log_5 (2x + 1)^2 = \log_5 \sqrt{x^2 + 8x + 16}.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $(2x + 1)^2 = \sqrt{x^2 + 8x + 16}$.

Az egyenlet megoldása $x_1 = \frac{-3-\sqrt{57}}{8} \notin \text{É.T.}$ és $x_2 = \frac{-3+\sqrt{57}}{8} \in \text{É.T.}$, tehát

a feladat megoldása $x = \frac{-3+\sqrt{57}}{8}$;

g. $\sqrt{5x-8} > 0 \Rightarrow \frac{8}{5} < x$ és $2x+3 > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left] \frac{8}{5}; \infty \right[.$

$$\lg \sqrt{5x-8} + \frac{1}{2} \cdot \lg(2x+3) = \frac{1}{2} \cdot \lg 36 \Rightarrow \lg \sqrt{(5x-8)(2x+3)} = \lg \sqrt{36}.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\sqrt{(5x-8)(2x+3)} = \sqrt{36}$.

Az egyenlet megoldása $x_1 = -\frac{12}{5} \notin \text{É.T.}$ és $x_2 = \frac{5}{2} \in \text{É.T.}$, tehát a feladat

megoldása $x = \frac{5}{2}$;

h. $x+3 > 0 \Rightarrow -3 < x$ és $\log_2(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ és $x-7 > 0 \Rightarrow 7 < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in]7; \infty[.$

$$\frac{\log_2 1}{\log_2(x+3)} = \log_2(x-7) \Rightarrow 0 = \log_2(x-7) \cdot \log_2(x+3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x-7) = 0 \Rightarrow x = 8 \in \text{É.T.}$$

vagy

$$\Rightarrow \log_2(x+3) = 0 \Rightarrow x = -2 \notin \text{É.T.}$$

A feladat megoldása $x = 8$.

19) Használjuk fel, hogy $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

a. $0 < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \mathbb{R}^+.$

$$\log_2 x + \log_4 x = 3 \Rightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 3 \Rightarrow 2 \cdot \log_2 x + \log_2 x = 6.$$

Az egyenlet megoldása $x = 4 \in \text{É.T.}$, más megoldás nincs;

b. $x+1 > 0 \Rightarrow -1 < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in]-1; \infty[.$

$$\log_5(x+1) + \log_{25}(x+1) = 1,5 \Rightarrow \log_5(x+1) + \frac{\log_5(x+1)}{\log_5 25} = 1,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log_5(x+1) + \log_5(x+1) = 3.$$

Az egyenlet megoldása $x = 4 \in \text{É.T.}$, más megoldás nincs;

c. $0 < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \mathbb{R}^+.$

$$\log_3 x - \log_{\sqrt{3}} x = 1 \Rightarrow \frac{\log_{\sqrt{3}} x}{\log_{\sqrt{3}} 3} - \log_{\sqrt{3}} x = 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} x - 2 \cdot \log_{\sqrt{3}} x = 2.$$

Az egyenlet megoldása $x = \frac{1}{3} \in \text{É.T.}$, más megoldás nincs;

d. $x > 0$ és $x \neq 1 \Rightarrow \text{É.T.: } x \in]0; 1[\cup]1; \infty[.$

$$\log_x 3 + \log_3 x = 2 \Rightarrow \frac{\log_3 3}{\log_3 x} + \log_3 x = 2 \Rightarrow 1 + (\log_3 x)^2 = 2 \cdot \log_3 x.$$

Vezessünk be új ismeretlent: $a = \log_3 x$.

Így az egyenlet $1 + a^2 = 2 \cdot a \Rightarrow a = 1$.

$$\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Az egyenlet megoldása $x = 3 \in \text{É.T.}$, más megoldás nincs.

20)

a. $x + 3 > 0 \Rightarrow -3$ és $2x + 1 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left] -\frac{1}{2}; \infty \right[.$

A 7 alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növény, ezért:
 $(x + 3) > (2x + 1).$

Az egyenlőtlenség megoldása: $x < 2.$

Az értelmezési tartománnyal összevetve $x \in \left] -\frac{1}{2}; 2 \right[;$

b. $2x - 5 > 0 \Rightarrow \frac{5}{2} < x$ és $6 - x > 0 \Rightarrow x < 6 \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left] \frac{5}{2}; \infty \right[.$

Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért:

$$2x - 5 \leq 6 - x;$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $x \leq \frac{11}{3}.$

Az értelmezési tartománnyal összevetve $x \in \left] \frac{5}{2}; \frac{11}{3} \right[;$

c. $7 + x > 0 \Rightarrow -7 < x$ és $x - 3 > 0 \Rightarrow 3 < x$ és $2x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{É.T.: } x \in]3; \infty[.$$

$$\log_3 (7 + x) + \log_3 (x - 3) \leq \log_3 (2x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 [(7 + x) \cdot (x - 3)] \leq \log_3 (2x + 3).$$

A 3 alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növény, ezért:

$$(7 + x) \cdot (x - 3) \leq (2x + 3).$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $-6 \leq x \leq 4.$

Az értelmezési tartománnyal összevetve $x \in]3; 4];$

d. $7x - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{7} < x \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left] \frac{1}{7}; \infty \right[.$

$$\log_{27} (7x - 1) < \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{27} (7x - 1) < \log_{27} 3.$$

A 27 alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növény, ezért: $7x - 1 < 3.$

Az egyenlőtlenség megoldása: $x < \frac{4}{7}.$

Az értelmezési tartománnyal összevetve $x \in \left] \frac{1}{7}; \frac{4}{7} \right[;$

e. $\frac{3-x}{2x+1} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 3 \Rightarrow \text{É.T.: } x \in \left] -\frac{1}{2}; 3 \right[.$

(Megjegyzés: az É.T. meghatározása helyett választható a gyökök ellenőrzése.)

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3-x}{2x+1} < 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{3-x}{2x+1} < \log_{\frac{1}{3}} 1.$$

Az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért:

$$\frac{3-x}{2x+1} > 1.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$.

Az értelmezési tartománnyal összevetve $x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right[$.

21)

a. $200000 \cdot 1,06^n \geq 350000$

$1,06^n \geq 1,75$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\lg 1,06^n \geq \lg 1,75 \Rightarrow n \geq \frac{\lg 1,75}{\lg 1,06}.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $n \geq 9,6$.

Legalább 10 évnek kell eltelnie, hogy 350000 forintunk legyen;

b. $140000 \cdot 0,9^n \leq 140000 \cdot 0,6$

$0,9^n \leq 0,6$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\lg 0,9^n \leq \lg 0,6 \Rightarrow n \geq \frac{\lg 0,6}{\lg 0,9} \text{ (negatív számmal osztottunk!).}$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $n \geq 4,8$.

Legalább 5 évnek kell eltelnie, hogy a gép értéke az új árának 60 %-át érje.