MATEMATIKA „A”
11. évfolyam

Vektorok

5. modul

Készítette: Vidra Gábor

A modul célja	A vektorműveletek ismétlése, vektorokkal végzett műveletek megismerése és gyakorlása a koordinátasíkon. Vektorokkal megoldható koordinátageometriai problémák megoldása, skaláris szorzat megismerése, használata.
Időkeret	7 óra
Ajánlott korosztály	11. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Vektorok, vektorműveletek (9. évfolyam), szögfüggvények, egyenesek a koordinátasíkon.
A képességfejlesztés fókuszai	*Számolás, számítás, számlálás:* Koordinátageometriai alakzatok mennyiségi jellemzői, hajlásszögek meghatározása, vektorokkal kapcsolatos mennyiségek számítása (vektor hossza, skaláris szorzat, derékszögben elforgatott vektor koordinátái). Számológép használata. *Mennyiségi következtetés:* A mennyiségek fogalmának továbbfejlesztése. A koordinátasíkon való tájékozódás, a síkbeli alakzatok tulajdonságainak koordinátageometriai módszerekkel történő leírása. *Becslés, mérés, valószínűségi szemlélet:* Szakasz osztópontjának meghatározása, vektor hossza, vektor és szakasz végpontjainak becslése. *Szöveges feladatok, metakogníció:* Szövegértelmezés továbbfejlesztése, a lényegkiemelő képesség fejlesztése. A valóság tárgyainak geometriai modellezéséhez szükséges képességek fejlesztése. Csoportmunkában a társak jó gondolatainak megismerése, elfogadása, helytelen következtetések cáfolata. *Rendszerezés, kombinatív gondolkodás*: Az ábrázolás és a számítás kapcsolatának elmélyítése. *Induktív, deduktív következtetés:* Összefüggések, képletek felfedezése gyakorlati tapasztalatból kiindulva, azok általánosítása és alkalmazása.

TÁMOGATÓ RENDSZER

- Bemutató, amely tartalmazza az elméleti anyagot és a mintapéldákat (a mintapéldák feldolgozását sokszor csoportmunkában javasoljuk: a tanár felveti a problémát, amire a tanulók megoldást keresnek – a megoldás természetesen a *Tanulók könyvében* megtalálható, ezért ilyen esetekben azt nem szabad használni – a bemutatóval a mintapélda szövege kivetíthető, és az ellenőrzéshez is használhatjuk);
- 15.1 triminó (vektorműveletek koordinátákkal);
- 15.2 triminó (a modul összefoglalásához ajánlott).

Nem kell a modul minden feladatát megoldani. A tanulócsoport igényeinek és tudásszintjének megfelelően lehetőségünk van differenciálásra és arra is, hogy a modul anyagát a heti 3 óránál nagyobb óraszámban tanuló diákokkal is fel tudjuk dolgozni.

JAVASOLT ÓRABEOSZTÁS

Óraszám	**Óracím**	**Tananyag**
1.	Ismétlés	Csoportalakítás, 1.mintapélda, elmélet ismétlése, 2. mintapélda, feladatok (1–2).
2.	Vektorműveletek koordinátákkal	3. mintapélda (frontális), a vektorkoordináták fogalma, csoportalakítás, 4. mintapélda, elméleti anyag (vektor felírása végpontokból, két pont távolsága, vektor hossza), 5. mintapélda, elméleti anyag (vektorműveletek koordinátákkal)
3.	Vektorkoordinátákkal kapcsolatos feladatok	6. és 7. mintapélda, 5.1 triminó, feladatok (3–7), 8. mintapélda, feladatok (8–12),
4.	Gyakorlás	Vektor felmérése adott kezdőpontból, 9–10. mintapélda, feladatok (13–21)
5.	Skaláris szorzat	Definíció és tulajdonságok, 11. mintapélda, feladatok (22–32)
6.	Osztópontok, súlypont	12. mintapélda (csoportmunkában), feladatok (33–42), 13. mintapélda, súlypont koordinátái
7.	Feladatok megoldása	Feladatok (43–49), 5.2 triminó

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK

Vektorok síkban és térben

Középszint

Ismerje és alkalmazza feladatokban a következő definíciókat, tételeket: vektor fogalma, abszolútértéke; nullvektor, ellentett vektor; vektorok összege, különbsége, vektor skalárszorosa; vektorműveletekre vonatkozó műveleti azonosságok; vektor felbontása összetevőkre; skaláris szorzat definíciója, tulajdonságai; vektor koordinátái; a vektor 90°-os elforgatottjának koordinátái; vektorok összegének, különbségének, skalárral való szorzatának koordinátái; skalárszorzat kiszámítása koordinátákból.

Vektorok alkalmazása feladatokban

Emelt szint

A skalárszorzat koordinátákból való kiszámításának bizonyítása.

Koordinátageometria, pontok, vektorok

Középszint

Tudja $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátáit, abszolútértékét. Két pont távolságának, szakasz felezőpontjának, harmadoló pontjainak felírása, alkalmazása feladatokban. A háromszög súlypontja koordinátáinak felírása, alkalmazása feladatokban.

Emelt szint

Szakasz felezőpontja és harmadoló pontjai koordinátáinak kiszámítására vonatkozó összefüggések igazolása. Igazolja a háromszög súlypontjának koordinátáira vonatkozó összefüggést.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszköz/Feladat/ Gyűjtemény**
I. Ismétlés (1 óra)			
1.	Csoportalakítás (tetszőleges módszerrel)	Metakogníció, figyelem	
2.	Ráhangolódás (diákkvartett)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, számolás, számlálás, kombinatív gondolkodás.	1. mintapélda (bemutató)
3.	Vektor, vektorjellemzők (elméleti ismétlés, tanári magyarázat)	Számolás, számlálás, becslés, rendszerezés, kombinatív gondolkodás.	Bemutató
4.	Feladatok (csoportmunkában)		2. mintapélda, 1–2. feladatok
5.	Vektorműveletek (frontális ismétlés, tanári magyarázat)		
II. Vektorkoordináták, vektorműveletek (3 óra)			
1.	Vektor felbontása (frontális tanári magyarázat)	Kombinatív gondolkodás, rendszerezés, figyelem.	3. mintapélda
2.	Csoportalakítás, oldalvektorok (feldolgozás: diákkvartettel), tapasztalatok (vektor felírása a kezdőpont és a végpont koordinátáiból, két pont távolsága, vektor hossza)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció. Deduktív és induktív következtetés, számolás, becslés, ábrázolás.	4. mintapélda
3.	Vektorműveletek koordinátákkal (csoportmunka, majd tanári magyarázat)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, figyelem. Deduktív és induktív következtetés, számolás, becslés, ábrázolás.	5. mintapélda
4.	Merőleges vektorok (diákkvartettben)		6. és 7. mintapélda
5.	Vektorműveletek gyakorlása (csoportmunkában)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, figyelem. Deduktív és induktív következtetés, számolás, becslés, ábrázolás. Matematikai szöveg értése, képletek alkalmazása.	5.1 triminó, 8. mintapélda, 8–12. feladatokból
6.	Vektor felmérése adott kezdőpontból (csoportmunkában)		9–10. mintapélda, 13–21. feladatokból

III. Vektorok skaláris szorzata (1 óra)			
1.	A munka: példa vektorok skaláris szorzatára. Definíció, tulajdonságok (tanári magyarázat)	Deduktív és induktív következtetés, számolás, becslés, ábrázolás. Matematikai szöveg értése, matematikai eszközök alkalmazásai.	
2.	A skalárszorzat alkalmazása: vektorok hajlásszögének kiszámítása (tanári magyarázat, frontális)	Deduktív és induktív következtetés, számolás, figyelem, példakövetés.	11. mintapélda
3.	Skalárszorzattal kapcsolatos feladatok (csoportmunkában)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, figyelem. Deduktív és induktív következtetés, számolás, becslés, ábrázolás. Matematikai szöveg értése, képletek alkalmazása.	22–32. feladatokból

IV. Osztópontok, súlypont koordinátái (2 óra)			
1.	Szakasz felezőpontjának koordinátái (csoportmunka)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, figyelem. Deduktív és induktív következtetés, számolás, becslés, ábrázolás. Matematikai szöveg értése, képletek alkalmazása.	12. mintapélda
2.	A felezőpont alkalmazása feladatokban (csoportmunkában)		33–42. feladatokból
3.	Harmadoló pontok koordinátái, súlypont koordinátái (csoportmunka, majd tanári magyarázat)		13. mintapélda
4.	Feladatok megoldása (kooperatív módszerekkel)	Kooperáció, kommunikáció, metakogníció, figyelem. Deduktív és induktív következtetés, számolás, becslés, ábrázolás. Matematikai szöveg értése, képletek alkalmazása.	43–49. feladatokból, 5.2 triminó

I. Ismétlés

Módszertani megjegyzés:

Alakítsunk ki tetszőleges módszerrel 4 fős tanulócsoportokat!

A modul mintapéldáinak az a célja, hogy a tanulókat rávezesse a problémák megoldására, ezért a mintapéldákat mindig a tanulók dolgozzák fel csoportmunkában mint egy megoldandó feladatot. Természetesen a mintapéldák átvételekor a tanulók nem láthatják a Tanulók könyvét. Célszerű a modulhoz elkészült bemutatót kivetíteni, mert azon megtalálhatók a mintapéldák, és a feladat kitűzéséhez mást nem is kell igénybe venni.

Az 1. mintapélda célja a ráhangolódás, a megoldásra javasolt 10 percet adni a csoportoknak. Ellenőrzése diákkvartett módszerrel történik: a tanár egyenként felteszi az első kérdést: "Mennyi az *A* síkidom kerülete?" A csoporton belül megbeszélik a választ, majd a tanár által kijelölt egyik tanuló válaszol, és a csoport tagjai a válasz alapján ugyanazt az értékelést kapják. Ezután kerül sorra az *A* síkidom területe stb. Minden feladat esetén érdemes megbeszélni, hogyan oldották meg, ki talált másik megoldást, hogy a tanulók eszköztára gyarapodjon az egymástól való tanulás következtében. A csoportmunka értékelése a szokásos módon történik, de az ismétlés miatt lehetőleg pozitív jellegű megerősítő, és ne elmarasztaló legyen (például a jól teljesítő csoportok tagjai kapjanak pluszt).

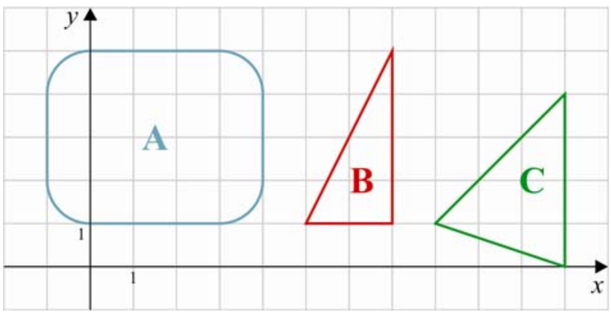
Mintapélda$_1$

a) Számítsuk ki a koordináta-rendszerbe berajzolt síkidomok kerületét és területét!

b) Mekkorák a *B* háromszög szögei?

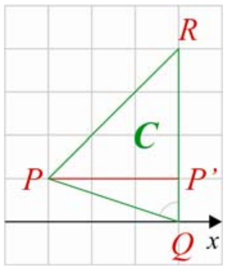
c) Mekkorák a *C* háromszög szögei?

d) Ha a *B* háromszöget eltoljuk a (– 4; 2) vektorral, mik lesznek az új háromszög csúcsainak koordinátái?



Megoldás:

a) $T_A = 16 + \pi \approx 19{,}1$; $T_B = 4$; $T_C = 6$ (kétféle megoldás: $T = \dfrac{a \cdot m}{2}$, vagy téglalap területéből kivonjuk két derékszögű háromszög területét).



$K_A = 10 + 2\pi \approx 16{,}3$, $K_B = 6 + 2\sqrt{5} \approx 10{,}5$,

$K_C = 4 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2} \approx 11{,}4$.

(A háromszögek nem tengelyekkel párhuzamos oldalait Pitagorasz-tétellel számítjuk ki.)

b) tangens szögfüggvénnyel: 63,4°, 90°és 26,6°.

c) tangens szögfüggvénnyel: 63,4°, 45° és 71,6°. (*PP’Q* és *PP’R* háromszögből.)

d) (1; 3), (3; 3), (2; 7).

Módszertani megjegyzés: Az ismétlést frontálisan végezzük a modulhoz készült bemutató segítségével.

Az irányított szakaszt **vektornak** nevezzük**. A** fizikában több vektormennyiséget megismertünk: elmozdulás, sebesség, gyorsulás, erő stb.

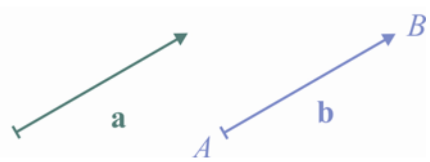
A vektorok kezdőpontjukkal és végpontjukkal kijelölnek egy irányt és egy távolságot. A távolságot a vektor hosszának vagy **abszolútértékének** nevezzük, és mindig valamilyen hosszúságegységhez viszonyítjuk.

A vektorok *egyenlősége* és *azonossága* különböző fogalmak. Két vektor **azonos**, ha kezdőpontjaik és végpontjaik páronként megegyeznek, jelölés: **a** ≡ **b**. Egy adott vektorral azonos vektor a síkon vagy a térben ugyanott helyezkedik el. Ezzel szemben egy adott vektorral egyenlő vektort a sík vagy tér bármely pontjából felmérhetünk, így egy adott vektorral egyenlő vektorból végtelen sok van. Két vektor **egyenlő**, ha hosszuk és irányuk megegyezik (vagyis egyeneseik párhuzamosak és irányításuk azonos).

Az ábra jelöléseivel:

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ $\mathbf{b} \equiv \overrightarrow{AB}$

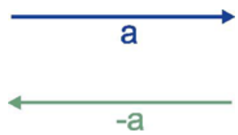
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$



Egységvektor (**e**): egységnyi hosszúságú vektor: | **e** | = 1.

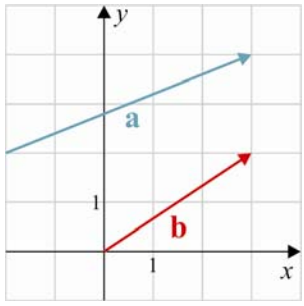
Nullvektor (**0**): 0 hosszúságú vektor. Definíciója: olyan vektor, amelynek megegyezik a kezdőpontja és a végpontja. Irányát tetszőlegesnek tekintjük.

Az **a** vektor **ellentettjének** nevezzük azt a vektort, amelyik vele egyenlő abszolútértékű, vele párhuzamos, de ellentétes irányú. Jelölése: – **a** .



Ha egy vektor a koordináta-rendszer kezdőpontjából indul ki, azt **helyvektornak** nevezzük. A nem origó kezdőpontú vektorok a **szabad vektorok**.

Mintapélda$_2$



Számítsuk ki az ábrán látható vektorok abszolútértékét!

Megoldás:

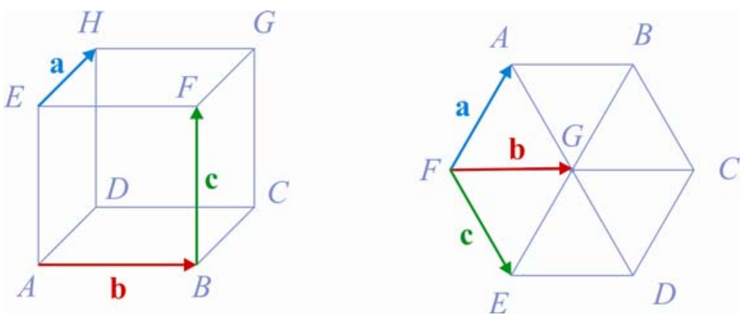
A koordináta-rendszer derékszögű négyzetrácsa és a Pitagorasz-tétel segítségével végezzük a számítást:

$|\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ egység.

Hasonlóan számítva: $|\mathbf{a}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}4$ egység.

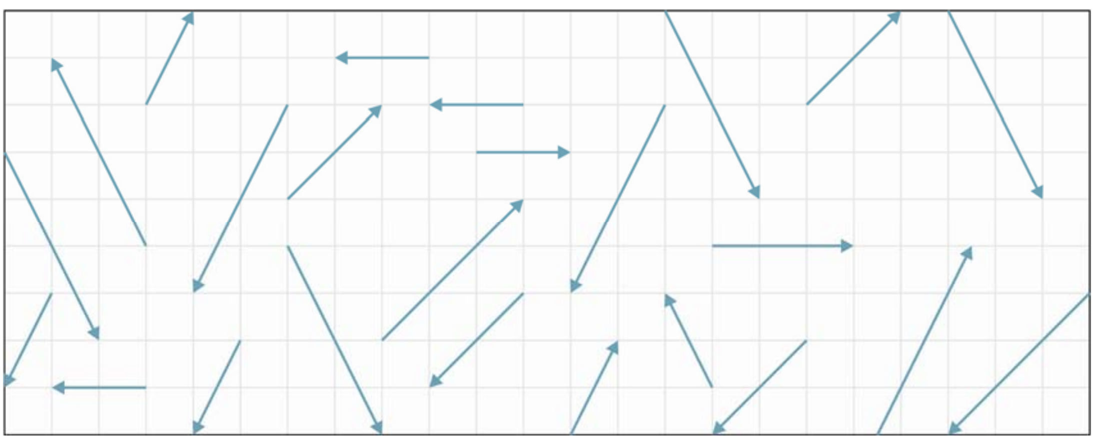
Feladatok

1. Keress egyenlő, ellentett és azonos vektorokat a kockán és a szabályos hatszögön!



Megoldás: Például **a** = $\overrightarrow{BC}$ a kockában, $\overrightarrow{BG}$ a szabályos hatszögben.

2. Keress az ábrán egyenlő, egyenlő abszolútértékű, illetve ellentett vektorokat!

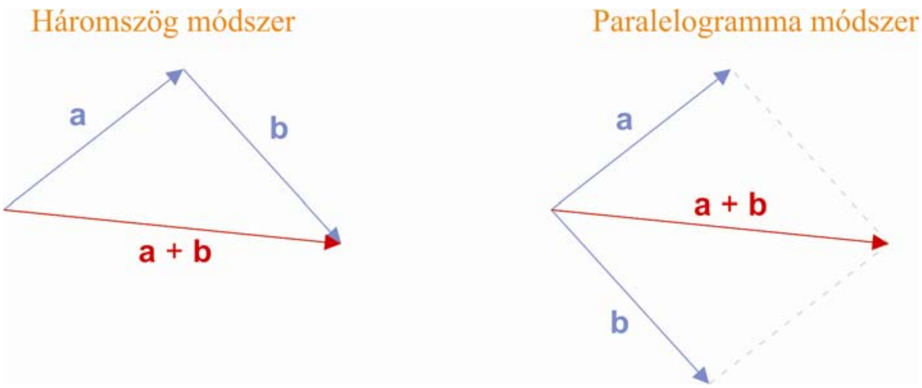


Vektorműveletek

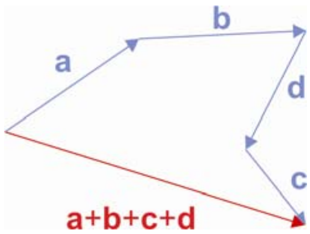
Két vektor összegét kétféle módszer szerint szerkeszthetjük meg:

a) **háromszög módszer:** az **a** végpontjából mérjük fel a **b** vektort; ekkor az **a** + **b** vektor az **a** kezdőpontjából a **b** végpontjába mutat.

b) **paralelogramma módszer:** ha **a** és **b** nem párhuzamosak, akkor az **a** és **b** vektorokat közös kezdőpontból mérjük fel, kiegészítjük paralelogrammává; ekkor az **a** + **b** vektor a paralelogramma közös kezdőpontból kiinduló átló vektora.



Több vektor összeadásánál használható a **láncszabály**:

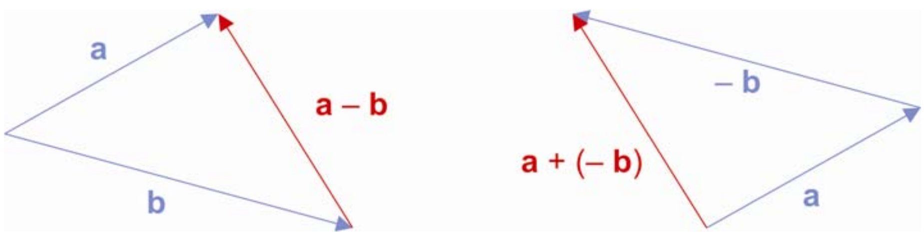


Egy **a** vektor és a nullvektor összege az **a** vektorral egyenlő: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

A vektorok összeadása a számokkal végzett összeadáshoz hasonlóan kommutatív (felcserélhető) és asszociatív (csoportosítható) művelet:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ és } \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

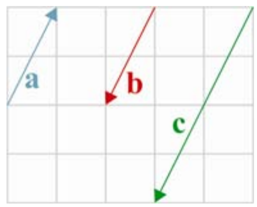
A vektorok összeadásának ellentett művelete a vektorok kivonása. Az **a** és **b** vektorok különbségét úgy képezzük, hogy közös kezdőpontból mérjük fel őket. A végpontjaikat összekötő, **a** végpontja felé mutató vektor az **a – b** vektor. Az **a** – **b** vektort úgy is megszerkeszthetjük, hogy az **a** vektorhoz hozzáadjuk **b** ellentett vektorát (– **b** vektort).



A vektorok kivonására a számok kivonásához hasonlóan nem teljesül sem a kommutativitás, sem az asszociativitás.

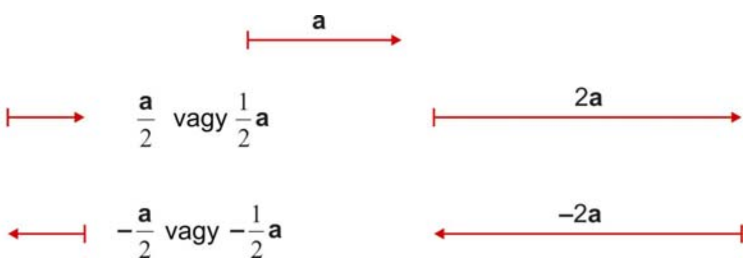
A vektorok nyújtására és zsugorítására a számmal (skalárral) történő szorzást használjuk.

Az ábrán az **a**, **b** és **c** vektorok között összefüggések állapíthatók meg:



b = – **a** ellentett vektorok, írhatjuk úgy is, hogy **b** = –1·**a;**
c = 2**b**, valamint
c = 2·(– **a)** = –2·**a**.

További példák vektorok számmal való szorzására:



Az **a vektor *k*-szorosa** ($k \in \mathbf{R}$, vagyis k egy valós szám) az a vektor, amelynek hossza $|k|\cdot|\mathbf{a}|$, iránya pedig $k > 0$ esetén **a** irányával megegyező, $k < 0$ esetén **a** irányával ellentétes, $k = 0$ esetén pedig nullvektort kapunk.

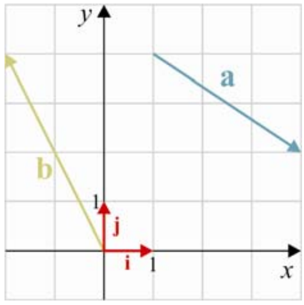
1-nél nagyobb abszolútértékű számmal megszorozva a vektort a hossza növekszik (nyújtás). Ha a szám abszolútértéke 0 és 1 közé esik, akkor a vektort vele megszorozva a vektor hossza csökken (zsugorítás). A csupán szorzótényezőjükben különböző vektorokat egyneműeknek tekintjük, így azok összevonhatók: például **a** + 2**a** = 3**a**.

A vektorok összeadását és számmal való szorzását használjuk egy vektor összetevőkre bontásakor is. Ez a koordináta-rendszerben egyszerű, mert az x és y tengely egységvektorai (**i** és **j**) jelölik ki azokat az összetevőket, amelyekre a vektorokat bontjuk.

II. Vektorkoordináták, vektorműveletek

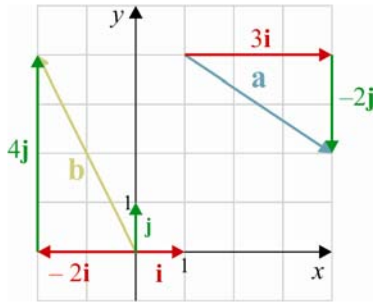
Mintapélda$_3$

Bontsuk fel az ábrán szereplő vektorokat az **i** és **j** egységvektorok segítségével olyan összetevőkre, amelyek az x és y tengellyel párhuzamosak!



Megoldás:

Az ábra helyvektorát felbonthatjuk egy –2**i** és egy 4**j** nagyságú vektor összegére: **b** = –2**i** + 4**j**.
Hasonlóan írható fel a szabad vektor is: **a** = 3**i** + (–2**j**), röviden **a** = 3**i** – 2**j**.



Ha a koordináta-rendszerben egy vektort az **i** és a **j** vektorok segítségével bontunk fel, akkor megkapjuk a vektor **lineáris kombinációját**, a **v** = $v_1 \cdot$ **i** + $v_2 \cdot$ **j** alakú felírást. A v_1 és v_2 számokat, vagyis **i** és **j** vektorok szorzóit a **v** vektor koordinátáinak nevezzük: **v** (v_1; v_2).

A mintapéldában az **a** vektor első koordinátája 3, második –2, amit így jelölünk: **a** (3; –2).
b koordinátái: **b** (–2; –4).

Megjegyzés: A pontok és vektorok koordinátáit rendezett számpárnak is nevezik. Azért „rendezett”, mert ezeket nem cserélhetjük fel: az 1. koordináta az x, a 2. koordináta az y tengely irányában mért távolságokat jelentik. Térben szükség van még egy koordinátára, ezért rendezett számhármasról beszélünk. Ekkor a z tengelyhez kapcsolódik a vektor 3. koordinátája. Helyvektor esetén a vektorkoordináták megegyeznek a végpont koordinátáival.

Mintapélda$_4$

Módszertani megjegyzés: A feldolgozás a bemutató segítségével, diákkvartett módszerével, a) esetén egyszerű leolvasással történik.

Adott egy négyszög négy csúcsa: $A(–4; –1)$, $B(–2; 4)$, $C(2; 4)$, $D(2; –3)$.

a) Határozzuk meg az oldalak vektorait!

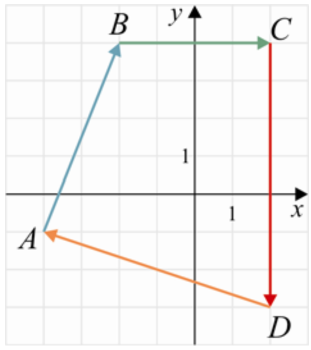
b) Keressünk kapcsolatot a vektorkoordináták és a végpontok koordinátái között! Egészítsük ki a mondatot a megadott szavak felhasználásával (kötőszavakat, névelőket pótolhatsz)!

| megfelelő | kezdőpont | végpont | kivonjuk | koordinátáiból | koordinátáit |

Adottak egy vektor kezdőpontjának és végpontjának koordinátái. A vektor koordinátáit megkapjuk, ha ……………………………………………………………………….

c) Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszát, és az A és C pontok távolságát!

Megoldás:

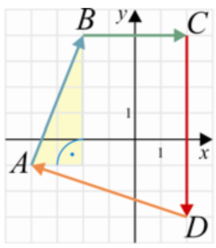


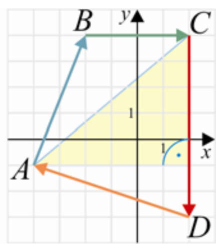
a) Leolvassuk az oldalvektorok koordinátáit:

$\overrightarrow{AB}$ (2;5), $\overrightarrow{BC}$ (4;0), $\overrightarrow{CD}$ (0;–7), $\overrightarrow{DA}$(–6;2) .

b) A vektor koordinátáit megkapjuk, ha a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

c) Az $\overrightarrow{AB}$ (2;5) koordinátáiból számítjuk ki a hosszát, egy derékszögű háromszög segítségével:





$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}\approx 5{,}4$ egység, amit méréssel ellenőrizhetünk.

Az A(–4; –1) és C(2; 4) pontok távolságának meghatározásához szintén derékszögű háromszöget használunk, amelynek oldalai: 6 és 5 egység, így a távolság $\sqrt{61}\approx 7{,}8$ egység.

Ha adott a vektor kezdőpontja: A (a_1; a_2) és végpontja: B (b_1; b_2), akkor a vektor koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

$$A\,(a_1;\,a_2),\ B\,(b_1;\,b_2)\quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AB}\,(b_1-a_1;\,b_2-a_2)$$

A kezdőpontjával és végpontjával megadott vektor hosszát a megfelelő koordináták különbségéből számítjuk ki ugyanúgy, mint a két pont távolságát:

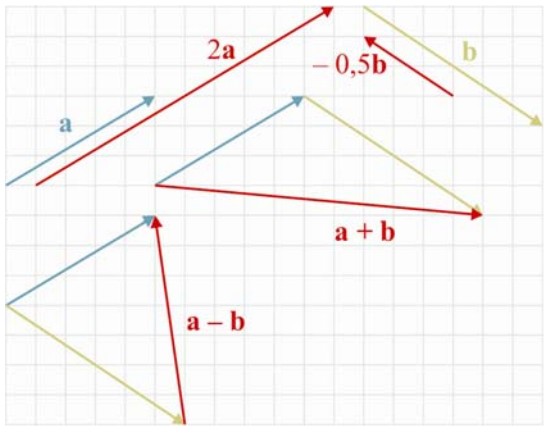
$$A\,(a_1;\,a_2),\ B\,(b_1;\,b_2)\quad\Rightarrow\quad |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

A koordinátáival megadott vektor hosszát a koordináták négyzetösszegének négyzetgyöke adja:

$$\mathbf{a}\,(a_1;\, a_2) \quad \Rightarrow \quad |\,\mathbf{a}\,| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$$

Mintapélda5

Adott két vektor **a** (5; 3) és **b** (6; –4). Rajzoljuk meg a következő vektorokat és határozzuk meg a koordinátáikat: a) **a** + **b**; b) **a** – **b**; c) 2**a**; d) – 0,5**b**.



Megoldás:

a) **a** + **b** (11; –1);

b) **a** – **b** (–1;7);

c) 2**a** (10; 6);

d) – 0,5**b** (–3; 2).

e) Keressünk összefüggéseket, és egészítsd ki a hiányzó mondatokat! Tegyük a helyükre a megadott szavakat! Kötőszavakat, névelőket pótolhatunk!

vektor | megfelelő | koordinátákat | k -val | összeadódnak | megfelelő | koordináták | egymásból | szorzódnak | kivonjuk | koordinátái

Két vektor összeadásakor …

Két vektor kivonásakor …

Ha egy vektort megszorzunk egy k számmal, akkor …

Megoldás:

Két vektor összeadásakor a megfelelő koordináták összeadódnak.

$$\mathbf{a}\,(a_1;\, a_2),\ \mathbf{b}\,(b_1;\, b_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} + \mathbf{b}\,(a_1 + b_1;\, a_2 + b_2)$$

Két vektor kivonásakor a megfelelő koordinátákat kivonjuk egymásból.

$$\mathbf{a}\,(a_1;\, a_2),\ \mathbf{b}\,(b_1;\, b_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} - \mathbf{b}\,(a_1 - b_1;\, a_2 - b_2)$$

Ha egy vektort megszorzunk egy k számmal, akkor a vektor koordinátái is k-val szorzódnak.

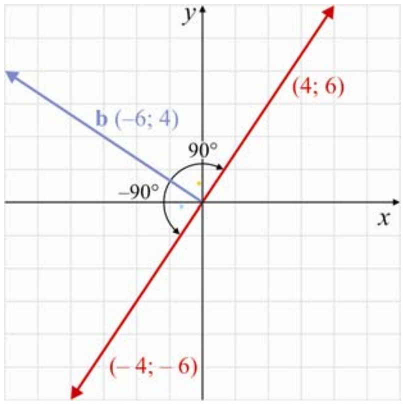
$$\mathbf{a}\,(a_1;\, a_2),\ k\in\mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad k\cdot\mathbf{a}\,(k\cdot a_1;\, k\cdot a_2)$$

Mintapélda$_6$

Forgassuk el a **b**(–6; 4) vektort 90°-kal a kezdőpontja körül mindkét irányba, és olvassuk le a keletkezett vektorok koordinátáit!

Megoldás:

Az eredmény: (4; 6) és (–4; –6).



Általában is igaz, hogy ha egy vektort 90°-kal elforgatunk, akkor a koordinátái felcserélődnek, és az egyik (de csak az egyik!) előjelet vált.

$$\mathbf{a}\,(a_1;\, a_2) \xrightarrow{90^\circ} (a_2;\, -a_1),\text{ illetve } (-a_2;\, a_1)$$

+90°-os forgatásnál $(-a_2;\, a_1)$, –90°-os forgatásnál $(a_2;\, -a_1)$ vektort kapunk.

Mintapélda$_7$

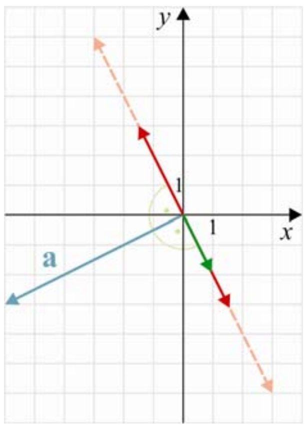
a) Határozzuk meg annak a vektornak a koordinátáit, amelyik az **a**(–6; –3) vektorra merőleges és hossza az **a** hosszának a fele!

b) Határozzuk meg annak a vektornak a koordinátáit, amelyik az **a**(–6; –3) vektorra merőleges és *y* koordinátája –2!

Megoldás:

a) Két ilyen vektor is van, ui. az **a**-t 90°-kal elforgatva két vektort kapunk: (3; –6) és (–3; 6). Fele akkora vektort a 0,5-tel való szorzás eredményez, így a keresett vektorok: (1,5; –3) és (–1,5; 3).

b) Keressük azt az (*x*; –2) vektort, amelyik párhuzamos a (3; –6) vektorral. A második koordinátákat összevetve látható, hogy a (3; –6) vektort harmadára kell zsugorítani, így a keresett vektor: (1; –2). Szerkesztéssel ellenőrizzük!



5.2 triminó

Módszertani megjegyzés: Csoportmunkában használjuk az ***5.1 triminót***. A háromszögeket az azonos eredménnyel végződő vektorműveleteket tartalmazó élek összeillesztésével kell kirakni. Az értékelés alapja a helyes kirakás.

Mintapélda8

Adott az **a**(12; 8) és a **b**(–3; 5) vektor. Melyek a **d** vektor koordinátái, ha az $\frac{\mathbf{a}}{2}+4\mathbf{d}-\mathbf{b}$ vektorművelet eredménye nullvektor?

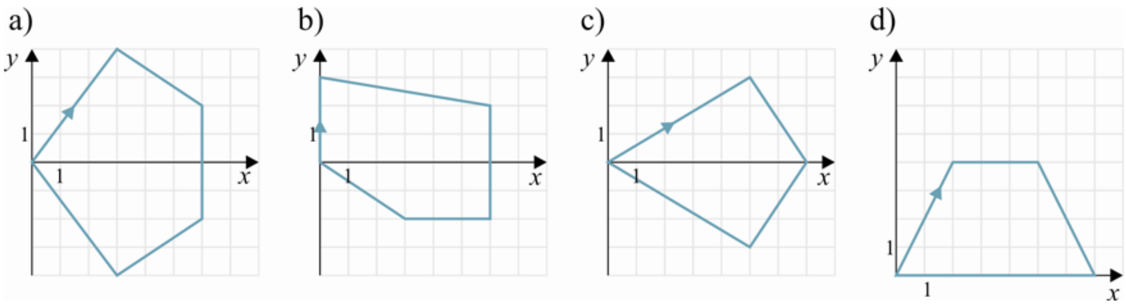
Megoldás:

A vektorműveleteket koordinátánként végezzük. A megfelelő koordináták összege nulla, így $\frac{a_1}{2}+4d_1-b_1=0$, behelyettesítve: $\frac{12}{2}+4d_1+3=0$, ahonnan $d_1=-\frac{9}{4}$. Hasonlóan a második koordinátákra: $\frac{a_2}{2}+4d_2-b_2=0$, ahonnan $\frac{8}{2}+4d_2-5=0$, $d_2=\frac{1}{4}$.

A keresett vektor: $\mathbf{d}\left(-\frac{9}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Feladatok

3. Egy régi hegesztőgép csak sokszögeket képes vágni, és vektorokkal kell megadni, hogy a vágás során mi legyen a következő mozgás. Írd le, hogy milyen vektorsorozattal írható le az ábrán látható síkidomok vágása!



Megoldás:

a) (3; 4), (3; –2), (0; –4), (–3; –2), (–3; 4);
b) (0; 3), (6, –1), (0, –4), (–3; 0), (–3; 2);
c) (5; 3), (2; –3), (–2, –3), (–5, +3);
d) (2; 4), (3; 0), (2; –4), (–7, 0).

4. A monitoron a koordináta-rendszer kezdőpontja a képernyő bal alsó sarka. A rajzoló teknőc helyzete $A(140; 220)$.

a) Hová kerül a teknőc, ha (100; –80) képpontvektorral elmozdul a képernyőn?

b) Határozd meg az új pontba mutató helyvektort!

Megoldás:

a) $B(240; 140)$; b) Megegyezik a pont koordinátáival: (240; 140).

5. A képernyő méretei a monitoron: 32 cm széles, és 24 cm magas, a monitor felbontása: 1024 x 768 képpont, a koordináta-rendszer kezdőpontja a bal alsó sarokban van. Gizi húzott egy szakaszt, amelynek kezdőpontja (358; 690), végpontja (870; 340).

a) Hány képpont a vonal hossza?

b) Az egér mozgatásával a teljes képernyőt 4,5 cm oldalú, négyzet alakú területekkel lehet bekeretezni. Mennyi utat tett meg Gizi egere, mialatt a vonalat megrajzolta?

Megoldás:

a) kb. 620 képpont, mert a különbségvektor (512; –350) hosszával lényegében megegyezik;

b) vízszintesen $(870-358)\cdot\frac{45}{1024}=512\cdot\frac{45}{1024}=22{,}5\,\text{mm}$, függőlegesen $(690-340)\cdot\frac{45}{768}=350\cdot\frac{45}{768}\approx 20{,}5$, a távolság $\sqrt{22{,}5^2+20{,}5^2}\approx 30\,\text{mm}$.

6. Adott: **a**(–2; 4) és **b**(4; 4). Számítsd ki a következő vektorműveletek eredményét, és ábrázold a megoldást a koordináta-rendszerben! Határozd meg az eredményvektorok hosszát is!

a) $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$; b) $\frac{\mathbf{b}}{2}+2\mathbf{a}$; c) $3\mathbf{a}-\frac{\mathbf{b}}{2}$; d) $\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{4}$.

Megoldás:

a) (– 10; –4), 10,8 egység; b) (– 2; 10), 10,2 egység;

c) (– 8; 10), 12,8 egység; d) (0; 3), 3 egység.

7. Adott: $\mathbf{a}(2; -3)$ és $\mathbf{b}(4; 1)$. Számítsd ki a következő vektorműveletek eredményét, és ábrázold a megoldást a koordináta-rendszerben! Határozd meg az eredményvektorok hosszát is! a) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$; b) $\frac{1}{3}\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{a}$; c) $5\mathbf{a} - (4\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Megoldás:

a) $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (6; 5) és $\sqrt{61} \approx 7{,}8$; b) $\mathbf{a} - \frac{5}{2}\mathbf{b}$ (–8; –5,5) és $\sqrt{94{,}25} \approx 9{,}7$;

c) $6\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ (–4; –22) és $\sqrt{500} \approx 22{,}4$.

8. Adottak: $\mathbf{a}$ (10; 3), $\mathbf{b}$ (15; –5) és $\mathbf{c}$ (–4; –8). Melyek a $\mathbf{d}$ vektor koordinátái, ha a megadott vektorok összege nullvektor?

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$; b) $2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{d} + \mathbf{c}$; c) $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 2\mathbf{a} + 4\mathbf{d} + \frac{\mathbf{b}}{3}$;

d) $\frac{\mathbf{a} + 2\mathbf{d}}{4} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Megoldás:

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (21; –10), vagyis $\mathbf{d}(-21; 10)$; b) $2 \cdot 10 - 15 - d_1 - 4 = 0$, ahonnan $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $\mathbf{d}(1; 3)$; c) $\mathbf{d}\left(\frac{17}{4}; \frac{35}{12}\right)$; d) $\mathbf{d}\left(63; -\frac{11}{2}\right)$.

9. Rajzold meg az $\overrightarrow{AB}$ vektort, ha $A(2; 3)$ és $B(5; -1)$! Rajzolj olyan vektorokat, amelyek egyenlőek $\overrightarrow{AB}$-vel és kezdőpontjuk a) $C(3; 1)$; b) $D(0; -2)$; c) $E(-1; -4)$.

Megoldás: a) (6; –3); b) (3; –6); c) (2; –8).

10. Határozd meg annak a téglalapnak az oldalvektorait, amelynek egyik oldala kétszer akkora, mint a másik, és az egyik oldal csúcsai (3; 3) és (1; 6)!

Megoldás: Négy olyan téglalap van, amelyek a feladat feltételeinek megfelelnek. Az oldalvektorok: (2; –3) és (6; 4) (ezek bármelyikének ellentettje is megoldás), valamint a (2; –3), és (1,5; 1) (itt is vehetjük bármelyik ellentettjét is)

11. Határozd meg a (3; 4) vektorral párhuzamos egységvektor koordinátáit!

Megoldás: A vektort elosztjuk a hosszával: $\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot(3;\,4)=\left(\frac{3}{5};\,\frac{4}{5}\right)$ vagy $\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$.

12. Melyik az a vektor, amelyik az (5, 12) vektorra merőleges, és hossza 20 egység!

Megoldás:

A vektorral párhuzamos egységvektort szorozzuk 20-szal. majd elforgatjuk 90°-kal.

$\frac{1}{\sqrt{5^2+12^2}}\cdot(5;\,12)\cdot 20=\left(\frac{100}{13};\,\frac{240}{13}\right)$. Ennek a vektornak a kétirányú 90°-os elforgatottja a megoldás: $\mathbf{v_1}\left(\frac{240}{13};-\frac{100}{13}\right)$ és $\mathbf{v_2}\left(-\frac{240}{13};\,\frac{100}{13}\right)$.

Vektor felmérése adott pontból

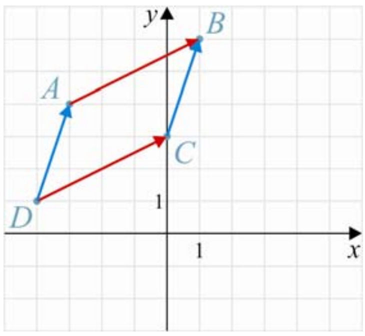
Mintapélda₉

Egy paralelogramma csúcsai: $A(-3;\,4)$, $B(\,1;\,6)$; $C(0;\,3)$, $D(-4;\,1)$.

a) Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CD}$ oldalvektorokat!

b) Milyen összefüggés van a paralelogramma szemközti oldalainak vektorai között?

c) Egy, az *ABCD* paralelogrammával egybevágó paralelogramma egyik csúcsa D’(0;–2). Határozzuk meg a másik három csúcs koordinátáit!



Megoldás:

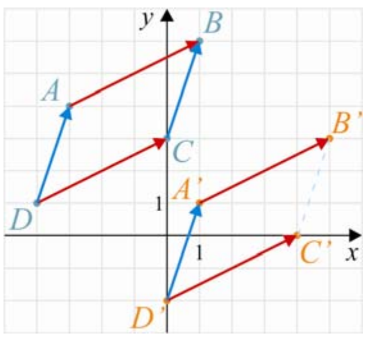
a) Mindkettő (4; 2) vagy (–4; –2).

b) A szemközti oldalvektorok egyenlőek vagy ellentettek.

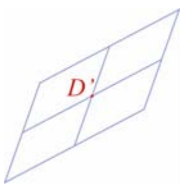
c) *D*’-ből felmérjük a $\overrightarrow{DA}$ (1; 3) vektort, és leolvassuk a végpont koordinátáit: *A*’ (1; 1).

D’-ből felmérjük a $\overrightarrow{DC}$ (4; 2) vektort, és leolvassuk a végpont koordinátáit: *C*’ (4; 0).

A’-ből felmérjük a $\overrightarrow{DC}$ (4; 2) vektort, és leolvassuk a végpont koordinátáit: *B*’ (5; 3).



És még három másik megoldást is találunk!



Az előbbi példában többször előfordult, hogy a vektort egy adott pontból kell felmérni, és a végpont koordinátáit keressük. Például:

D' (0; –2)	D' (0; –2)	A' (1; 1)
$\overrightarrow{DA}$ (1; 3)	$\overrightarrow{DC}$ (4; 2)	$\overrightarrow{DC}$ (4; 2)
A' (1; 1)	C' (4; 0)	B' (5; 3)

Korábban már volt szó arról, hogy a vektor koordinátáit úgy kapjuk, hogy a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit.

Ha adott egy vektor és a kezdőpontja, akkor a végpontjának koordinátáit úgy kapjuk, hogy összeadjuk a vektor és a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

$A\ (a_1; a_2),\ \overrightarrow{AB}\ (x; y) \quad \Rightarrow \quad B\ (a_1 + x; a_2 + y)$

$A\ (a_1; a_2)$
$\overrightarrow{AB}\ (x; y)$
$B\ (a_1 + x; a_2 + y)$

Mintapélda10

Adott a koordináta-rendszerben egy négyszög, amelynek csúcsai: $A(1;\ 5)$, $B(7;\ 1)$, $C(7;\ 5)$, $D(4;\ 7)$.

a) Bizonyítsuk be, hogy a négyszög trapéz!

b) Döntsük el, hogy szimmetrikus-e a trapéz vagy nem? Döntésünket igazoljuk számítással!

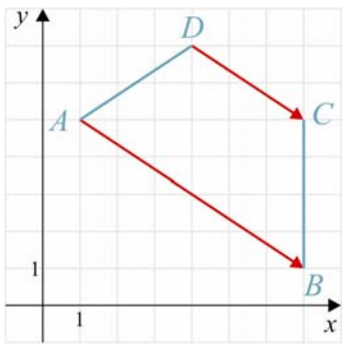
c) Határozzuk meg a négyszög területét!

Megoldás:

a) Megvizsgáljuk az oldalvektorokat. Amennyiben két vektor párhuzamos, akkor egymás számszorosai, vagyis a megfelelő koordináták hányadosa egyenlő.

Emlékeztető:
$k \cdot \mathbf{a}\ (a_1, a_2) \Rightarrow (k \cdot a_1, k \cdot a_2)$

Az ábra alapján a szóba jöhető két vektor $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$, koordinátáik:



$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1;\ b_2 - a_2) = (6; –4)$, valamint

$\overrightarrow{DC} = (c_1 - d_1;\ c_2 - d_2) = (3; –2)$.

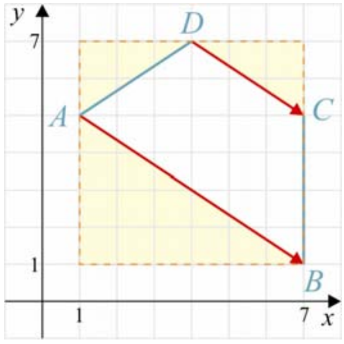
$\frac{6}{3} = 2$ és $\frac{-4}{-2} = 2$, vagyis $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC}$, tehát van két párhuzamos oldal, a négyszög trapéz.

b) A trapéz csak akkor lehet szimmetrikus, ha szárainak hossza egyenlő, ezért kiszámítjuk az AD és BC távolságokat:

$AD = \sqrt{(d_1 - a_1)^2 + (d_2 - a_2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ egység és $BC = 4$ egység, a szárak hossza nem egyenlő, a trapéz nem szimmetrikus.

c) A terület kiszámításához segítségül hívjuk a négyzetrácsot: téglalap alakú keretbe foglaljuk a négyszöget, és a téglalap területéből kivonjuk a derékszögű háromszögek területét.

$T = 6^2 - \left(2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2}\right) = 18$ egység.



Feladatok

13. Egy paralelogramma három csúcsának koordinátái:

a) $A(-3; -2)$, $B(4; 0)$, $C(6; 3)$; b) $A(-1; 6)$, $B(7; 2)$, $C(3; -2)$;

c) $A(5; -4)$, $B(-1; 4)$, $C(2; 8)$; d) $A(0; -5)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$.

Határozd meg a paralelogramma negyedik csúcsának koordinátáit, ha adott három csúcsa!

Megoldás: a) (–1; 1); b) (–5; 2); c) (8; 0); d) (2; –8).

14. Egy paralelogramma három csúcsának koordinátái: (3; 1), (2; 4) és (–2; 1). Határozd meg a negyedik csúcs koordinátáit! Figyelj a megoldások számára is!

Megoldás: (–1; –2), (–3; 4), (7; 4).

15. Határozd meg a négyzet hiányzó csúcsainak koordinátáit, ha két szomszédos csúcsának koordinátái:

a) $A(0; 0)$, $B(5; 0)$; b) $A(3; 0)$, $B(1; -5)$; c) $A(1; 6)$, $B(3; 0)$.

Megoldás:

Meghatározzuk az oldalvektor koordinátáit, majd a vektort mindkét irányban elforgatjuk 90°-kal. Az így kapott koordinátákhoz hozzáadjuk a megadott pont koordinátáit. A kapott koordináták: a) $C(5; 5)$, $D(0; 5)$ és $C(5; -5)$, $D(0; -5)$;

b) $C(6; -7)$, $D(8; -2)$ és $C(-4; -3)$, $D(-2; 2)$; c) $C(9; 2)$, $D(7, 8)$ és $C(-3; -2)$, $D(-5; 4)$.

16. Egy négyzet átlóinak metszéspontja a $K(-2; 2)$ pont, egyik csúcsának koordinátái: $A(1; 2)$. Határozd meg a további csúcsok koordinátáit!

Megoldás: $\overrightarrow{KA}$-t mindkét irányban elforgatjuk 90°-kal, és az így kapott vektorok koordinátáihoz hozzáadjuk K pont koordinátáit (ekkor kapjuk B és D csúcsok koordinátáit). C csúcs koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy K koordinátáihoz hozzáadjuk $\overrightarrow{AK}$ megfelelő koordinátáit. Eredmények: $B(-2; 5)$, $C(-5; 2)$, $D(-2; -1)$.

17. Egy téglalap egyik oldala háromszor olyan hosszú, mint a másik. A rövidebb oldal két végpontja: (0; –1) és (–2; 2). Határozd meg a téglalap további csúcsainak koordinátáit!

Megoldás:

Az oldalvektor (2; –3), ezt 90°-kal elforgatva a (3; 2) és a (–3; –2) vektorokat kapjuk, ezeket 3-mal megszorzunk: (9; 6) és (–9; –6). Az adott két csúcsból két megoldást kapunk: (9; 5) és (7; 8), valamint (–9; –7) és (–11; –4).

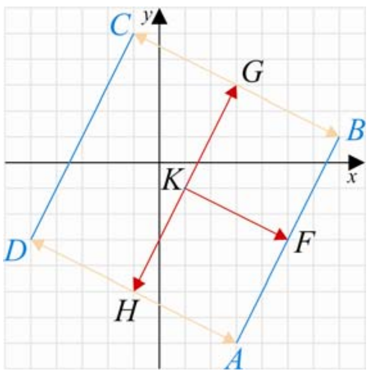
18. Egy négyzet átlóinak metszéspontja a $K(1; -1)$ pont, egyik oldalfelező pontja az $F(5; -3)$. Határozd meg a négyzet csúcsainak koordinátáit, területét és kerületét!

Megoldás:

$\overrightarrow{KF}$ vektort elforgatjuk 90°-kal mindkét irányban, ezek koordinátáihoz hozzáadjuk K megfelelő koordinátáit (kapjuk G és H pontokat). A kapott pontok koordinátáihoz hozzáadjuk $\overrightarrow{KF}$-nek és ellentettjének megfelelő koordinátáit. Eredmények:

$A(3; -7)$, $B(7; 1)$, $C(-1; 5)$, $D(-5; -3)$.

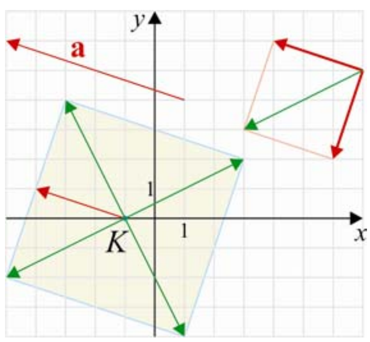
Az oldalhossz $\sqrt{80}$, a kerület 35,8 , a terület 80.



19. Egy négyzet átlóinak metszéspontja a $K(-1; 0)$ pont, egyik oldalvektora az $\mathbf{a}\,(-6; 2)$ vektor. Melyek a négyzet csúcsainak koordinátái?

Megoldás:

Az ábra szerint a $\frac{\mathbf{a}}{2}(-3; 1)$ vektort elforgatjuk 90°-kal, és a kapott (–1; –3) vektorhoz hozzáadjuk. A (–4; –2) ösz-



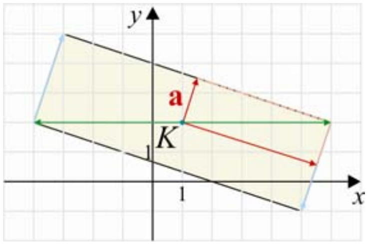
szegvektort mérjük fel K-ból, így megkapjuk a négyzet egyik csúcsát.

Az eredmények: (1; –4), (–5; –2), (–3; 4), (3; 2).

20. Egy téglalap átlóinak metszéspontja a $K(1; 2)$ pont, és az egyik hosszabb oldalának felezőpontjába mutató vektor koordinátái: **a**(0,5; 1,5). Határozd meg a téglalap csúcsainak koordinátáit, ha egyik oldala háromszor olyan hosszú, mint a másik oldala!

Megoldás:

Jelölje **b** az **a** 90°-kal elforgatottját. Tekintsük az **a** + 3**b** vektort, ez adja a téglalap egyik csúcsát. Eredmények: (6; 2), (–3; 5), (–4; 2), (5; –1).

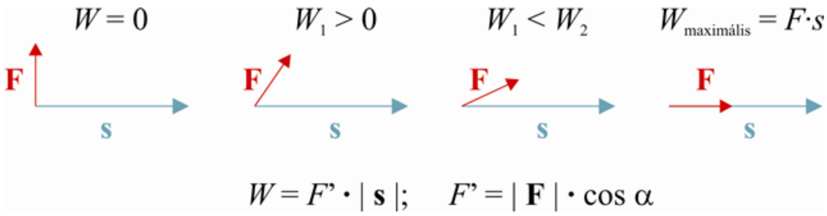


21. Egy deltoid átlóinak metszéspontja a $K(2; 2)$ pont, amely a hosszabb átló egyik harmadoló pontjában található. A rövidebb átló hosszának másfélszerese a nagyobb átló hossza, és a rövidebb átló egyik végpontja az $A(0; 5)$ pont. Határozzuk meg a deltoid többi csúcsát!

Megoldás: (–4; –2), (4; –1), (5; 4) és (0; –1), (4; –1), (8; 6).

III. Vektorok skaláris szorzata

A fizikában a vektormennyiségekből számokat is képezhetünk. Jellemző példa erre a munka (W). Ha egy szánkót húzunk, akkor az **F** húzóerő gyorsításra fordított munkája annál nagyobb, minél kisebb szöget zár be a kötél a talajjal:



Az **F** erő által végzett munka függ:

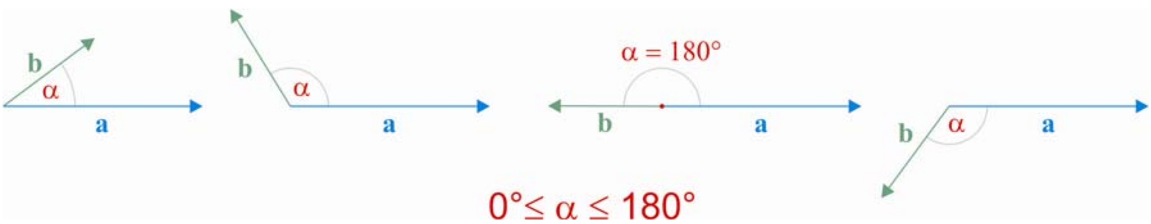
- az **F** erő nagyságától (F),
- az elmozdulás nagyságától (s), valamint
- az erővektor (**F**) és az elmozdulásvektor (**s**) által bezárt szögtől.

A munka skalármennyiség (szám), míg az elmozdulás és az erő vektormennyiségek. A két vektormennyiségből azok skaláris szorzata adja a munkát: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$

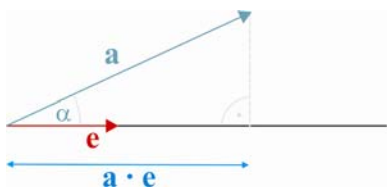
A vektorok skaláris szorzata függ a vektorok hosszától és hajlásszögüktől.

a és **b** vektorok **skalárszorzata**: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$,

ahol α a két vektor által bezárt szög (hajlásszögük).



Így már érthető, hogy ha egy erő az elmozdulásra merőleges ($\alpha = 90°$), akkor az miért nem végez munkát ($\cos\alpha = 0$). Igazolható, hogy két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor nulla, ha merőlegesek egymásra.



Ha az egyik vektor egységvektor, akkor a skaláris szorzat a másik vektornak az egységvektor egyenesére eső merőleges vetületének előjeles hosszával egyenlő.

Ha a két vektor párhuzamos, $\alpha = 0°$ miatt $\cos\alpha = 1$, így a skaláris szorzat a két vektor hosszának szorzata. Egy vektor önmagával való skaláris szorzata a vektor hosszának a **négyzetével** egyenlő: $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\,\mathbf{a}\,| \cdot |\,\mathbf{a}\,| \cdot 1 = |\,\mathbf{a}\,|^2$, ahonnan $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$.

A vektorok skaláris szorzásának néhány tulajdonságát feladatokban is gyakran alkalmazzuk: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativitás) és $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (disztributivitás).

A skaláris szorzat kifejezhető a vektorkoordinátákkal is: $\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,| \cdot |\,\mathbf{b}\,| \cdot \cos\alpha = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 .$$

Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk értéke nulla: $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$.

A koordináta-rendszer bázisvektoraira érvényes összefüggések: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$, és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$.

Mintapélda$_{11}$

Határozzuk meg az $\mathbf{a}(-1; 5)$ és a $\mathbf{b}(6; 3)$ vektorok skaláris szorzatát és hajlásszögét!

Megoldás:

A koordinátákból: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-1) \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 9$.

A hajlásszög meghatározásához kiszámítjuk a vektorok hosszát: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}} = \sqrt{26}$

és $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2}} = \sqrt{45}$. A hajlásszöget kifejezzük a skaláris szorzatból:

$\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \dfrac{9}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{45}}$, ahonnan a hajlásszög 74,7°.

Megjegyzés: A hajlásszög a skaláris szorzat alkalmazása nélkül is meghatározható, szögfüggvények és a négyzetrács segítségével.

Feladatok

22. Határozd meg a következő vektorok skaláris szorzatát!

a) A vektorok hossza 6, illetve 7 egység, közbezárt szögük 60°.

b) A vektorok hossza 4, illetve 10 egység, közbezárt szögük 120°.

c) **a**(5; 3) és **b**(–2; 7).

d) **a** = 4**i** + 5**j** és **b** = –9**j** + 4**i** .

e) **a** = 3**i** + 12**j** és **b** = –4**i** + **j** .

Megoldás: a) 21; b) –20; c) 11; d) –29; e) 0.

23. Az *ABC* szabályos háromszög oldala 6 cm. *F*-fel jelöljük a *BC* oldal felezőpontját. Határozd meg az alábbi skaláris szorzatok értékét:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}$; d) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}$.

Megoldás: a) 18; b) –18; c) 0; d) 9.

24. Az *ABCD* négyzet oldala 5 egység hosszú. A *BC* oldal felezőpontját *F* jelöli és a *BF* szakasz felezőpontját *P*. A négyzet középpontja *K*. Határozd meg az alábbi skaláris szorzatok értékét:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$; c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$;

e) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}$; f) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}$; g) $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{KF}$.

Megoldás: a) 0; b) 25; c) –25; d) 25; e) 12,5; f) $\frac{225}{8}\approx 28{,}1$; g) 6,25.

25. Határozd meg az **a** és **b** vektor hajlásszögét, ha

a) **a**(12; 4) és **b**(4; 12); b) **a**(4, 5) és **b**(-8; -10);

c) **a**(2;5) és **b**(6; –4); d) **a**(–8; 3) és **b**(–3; –5).

Megoldás: a) 53,1°; b) 180°; c) 101,9°; d) 79,6°.

26. Válaszd ki, hogy mely vektorok és hajlásszögek nem tartoznak össze!

a) **a**(2; 3), **b**(–3, 8), 68,2°; b) **a**(–4, 5), **b**(–6, 3), 77,9°;

c) **a**(–7; –2), **b**(8; 3), 175,4°; d) **a**(2; 5), **b**(–7; –5), 153°.

Megoldás: a) esetén 54,2°, d) esetén 147,3°; b) 24,8 °.

27. Egészítsd ki a mondatot: Ha két vektor skaláris szorzata negatív, a két vektor hajlásszöge ….

A skaláris szorzat abszolútértéke legfeljebb …

Megoldás: tompaszög; a két vektor hosszának a szorzata lehet.

28. Határozd meg y értékét úgy, hogy a (3; 8) és a (–2; y) vektorok merőlegesek legyenek egymásra!

Megoldás: Mivel a két vektor skalárisszorzata 0, innen $y = \frac{3}{4}$.

29. Határozd meg az ABC háromszög szögeit, ha A(–3; 2), B(4; 4), C(1; –3)

Megoldás:

Célszerű az oldalvektorok skaláris szorzatával dolgozni. Például az $\overrightarrow{AB}(7;2)$ és az $\overrightarrow{AC}(4;-5)$ hossza $\sqrt{53}$, illetve $\sqrt{41}$, koordinátáikkal számolva a skaláris szorzat 18. Innen $\alpha = 67{,}3°$. A másik két szög nagysága 61,8° és 50,9°.

30. Határozd meg az $ABCD$ négyszög szögeit, ha A(–2; 4), B(2; 2), C(–1; –3), D(–4; 0).

Megoldás:

A megoldás módszere hasonló az előző feladatban használt módszerhez.

Az eredmények: 90°, 108,4°, 76° és 85,6°.

31. A skaláris szorzat definíciója alapján döntsd el, hogy a skaláris szorzás kommutatív, illetve asszociatív művelet-e?

Megoldás:

Kommutatív, mert a skaláris szorzat definíciójában szereplő számok szorzása kommutatív művelet. Viszont nem asszociatív: (**a** · **b**) · **c** = (| **a** | · | **b** | · cosα)·**c**, ami **c**-vel párhuzamos vektort ad, míg **a** · (**b** · **c**) = **a** · (| **b** | · | **c** | · cosβ), ami **a**-val párhuzamos vektort eredményez. Nem volt feltétel **a** és **c** párhuzamossága, így az egyenlőség általános esetben nem áll fenn.

Megjegyzés: A skaláris szorzat kivezet a vektorok halmazából, így három vektor skaláris szorzatáról nem is lehet beszélni.

IV. Osztópontok, súlypont koordinátái

Módszertani megjegyzés: A képletek igazolása nem a középszintű érettségi tananyaga. Megtalálható ugyan a szövegben az érdeklődő diákok számára, de a felezőpont koordinátáit tapasztalatokon keresztüli szabálykereséssel „vezetjük le”, a harmadoló pont koordinátáinak levezetése pedig mintapéldában szerepel, mint a felezőpont levezetésekor használt módszer kiterjesztése. Amennyiben a felezőpont levezetését átvették a tanulókkal, jó példa analógia használatára a többi osztópont koordinátáinak meghatározása is.

Felezőpont koordinátái

Mintapélda12

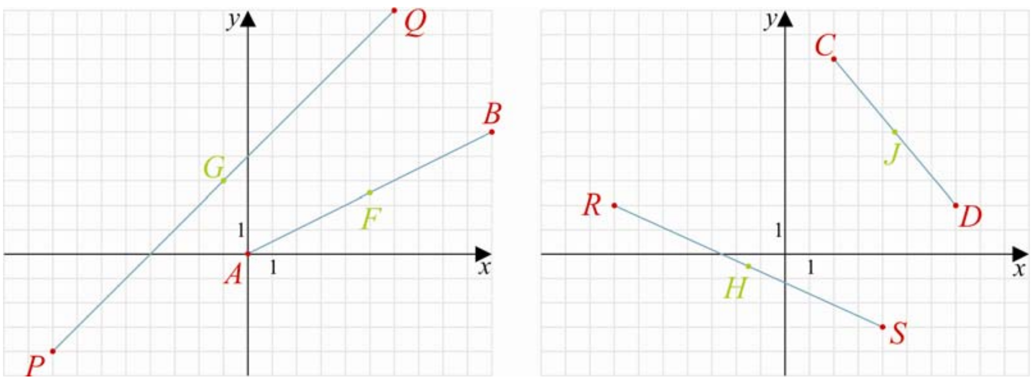
Módszertani megjegyzés: A feladatot projektor használatával javasolt feldolgozni (a tanári anyaghoz tartozó bemutatóban szerepelnek a mintapéldák), munkafüzet nélkül. Minden tanuló meghatároz a csoportból egy felezőpontot, majd együtt megkeresik a szabályt.

a) Olvassuk le a végpontjaikkal megadott szakaszok felezőpontjának koordinátáit a szakaszok felrajzolása után! Ha kell, szerkesszük meg a felezőpontot!

$A(0; 0)$, B $(10; 5)$; $P(–8; –4)$, $Q(6, 10)$; $R(–7; 2)$, $S(4; –3)$; $C(2; 8)$, $D(7; 2)$.

b) Fogalmazzunk meg szabályt, amelyik a felezőpont koordinátái és a szakasz végpontjainak koordinátái közötti kapcsolatot írja le!

Megoldás:

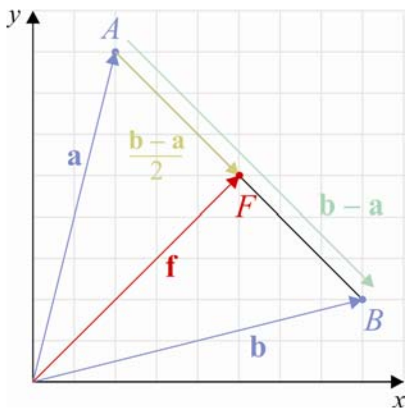


A felezőpontok rendre: $F(5; 2,5)$; $G(–1; 3)$; $H(–1,5; –0,5)$; $J(4,5; 5)$.

Adottak a szakasz két végpontjának koordinátái. Ekkor a felezőpont koordinátáit úgy kapjuk, hogy a végpontok megfelelő koordinátáinak összegét 2-vel osztjuk.

Megjegyzés: A felezőpont koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepe.

Az F felezőpont koordinátái megegyeznek a hozzá vezető **f** helyvektor koordinátáival. Így F meghatározásához elegendő a szakasz végpontjaiba mutató **a** és **b** helyvektorokkal kifejezni az **f** vektort.



Az ábráról leolvasható, hogy $\mathbf{f} = \mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$.

$$A(a_1; a_2),\ B(b_1; b_2) \quad \Rightarrow \quad F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A következőkben a diákkvartett vagy az ellenőrzés párban módszert ajánljuk. Egyes feladatoknak 4 részfeladata van, így azok alkalmasak arra is, hogy a csoport 4 tagja más-más számokkal párhuzamosan végezze ugyanazt a feladatot.

32. Az A pontba mutató helyvektor **a**, **b** pedig a B pontba mutató helyvektor. Határozd meg az AB szakasz felezőpontjába mutató **f** helyvektor koordinátáit!

a) **a**(5; 1), **b**(3; 9); b) **a**(–3; 1), **b**(3; –5);

c) **a**(–6; –3), **b**(5; –3); d) **a**(5; –7), **b**(–9; –2);

Megoldás: a) **f**(4; 5); b) **f**(0; –2); c) **f**(–0,5; –3); d) **f**(–2; –4,5).

33. Egy szakasz felezőpontja F, egyik végpontja az A pont. Határozd meg a szakasz másik végpontját, ha

a) F(–0,5; 0,5) és A(2; 4); b) A(–6; 1) és F(4; 1);

c) A(–2; 4) és F(1; 1); d) A(–3; –1) és F(1; 1).

Megoldás: Célszerű az $\mathbf{f} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ képletből kifejezni a **b** = 2**f** – **a** helyvektort.

Az eredmények: a) (–3; –3); b) (14; 1); c) (4; –2); d) (5; 3).

34. Adottak egy háromszög csúcsainak koordinátái: A(–6; –3), B(4; 1), C(0; 5). Határozd meg a középvonalak háromszögének csúcspontjait!

Megoldás: (–1; –1), (–3; 1), (2; 3).

35. Adottak egy háromszög oldalfelező pontjai: P(–6; –3), Q(4; 1), R(0; 5). Határozd meg a háromszög csúcsainak koordinátáit!

Megoldás: (–10; 1), (–2; –7), (10; 9)

36. Adott az AB szakasz két végpontja: $A(0; –2)$ és $B(3; 2)$. A szakaszt meghosszabbítjuk mindkét irányban a saját hosszával. Mik lesznek az így nyert szakasz végpontjainak koordinátái?

Megoldás: (–3; –6) és (6; 6).

37. Adott hat pont, amelyek egy háromszög csúcsai és oldalfelező pontjai. Döntsd el ábrázolás nélkül, hogy melyek a csúcspontok. A koordináták: (0; 2), (1; –1), (–3; 4), (–1; –2), (3; 0) és (–2; 1).

Megoldás:

A csúcsok: (3; 0), (–1, –2) és (–3; 4).

Módszertani megjegyzés: A feladat megoldását ábrázolással ellenőrizhetik a diákok, de csak ha a válaszadás megtörtént.

38. Határozd meg a középvonalak (vagyis a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok) vektorait, ha a négyszög csúcsai: $A(–1; 3)$, $B(6, –1)$, $C(4; –5)$, $D(–3; –4)$!

Megoldás:

A felezőpontok rendre $P(2,5; 1)$, $Q(5; –3)$, $R(0,5; –4,5)$, $S(–2; –0,5)$, a középvonalak vektorai: $\overrightarrow{PR}$ (–2; –5,5) és $\overrightarrow{QS}$ (–7; 2,5).

39. Egy paralelogramma szomszédos csúcsai: $A(–2; 4)$ és $B(6; 6)$, átlóinak metszéspontja: $K(1; 2)$. Határozd meg a paralelogramma másik két csúcsát!

Megoldás: (–4; –2) és (4, 0).

40. Az ABC háromszöget kétszeresére nagyítottuk egy K pontból. A csúcsok koordinátái: $A(1; 4)$, $B(–3; 2)$, $C(–2; –2)$. A B csúcs képe: $B'(0;0)$. Határozd meg a képháromszög másik két csúcsának koordinátáit!

Megoldás:

A középpontos hasonlóság tulajdonsága szerint: B a KB' szakasz felezőpontja, így $K(–6, 4)$. A másik két csúcs: $A'(8; 4)$ és $C'(2; –8)$.

41. Határozd meg a négyzet hiányzó csúcsait, ha két szemközti csúcsának koordinátái:

a) (0; 0), (6; 0); b) (3; 1), (1; –5); c) (1; 6), (3; 0).

Megoldás: a) (3; 3) és (3; –3); b) (5; –3) és (–1; –1); c) (5; 4) és (–1; 2).

Osztópontok koordinátái

A szakasz felezőpontjának meghatározásakor a felezőpontba mutató helyvektort fejeztük ki a végpontokba mutató helyvektorok segítségével. Ezt a módszert a szakasz bármely osztópontjának felírásakor követhetjük. Vizsgáljuk meg harmadolópontok esetén, hogyan alakulnak az összefüggések!

Mintapélda13

A szakasz A végpontjába mutató helyvektor **a**, B végpontjába mutató helyvektor **b**. Írjuk fel a harmadolópontokba mutató helyvektorokat az **a** és **b** vektorokkal!

Megoldás:

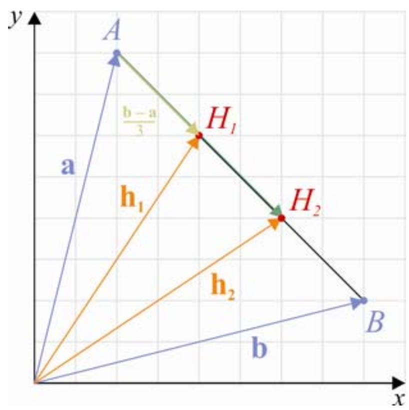
Jelölje $\mathbf{h_1}$ az A-hoz közelebbi, $\mathbf{h_2}$ a másik harmadolópontba mutató helyvektort!

A $\mathbf{h_1}$ felírható két vektor összegeként:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{3} = \frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{a}}{3} = \frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}.$$

Hasonlóan a $\mathbf{h_2}$ helyvektorra:

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{a} + 2\cdot\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{3} = \frac{3\mathbf{a}+2\mathbf{b}-2\mathbf{a}}{3} = \frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}$$



Az A és B végpontú szakaszok harmadoló pontjainak koordinátái:

$$A(a_1; a_2),\ B(b_1; b_2) \quad\Rightarrow\quad H_1\left(\frac{2a_1+b_1}{3}; \frac{2a_2+b_2}{3}\right) \text{ és } H_2\left(\frac{a_1+2b_1}{3}; \frac{a_2+2b_2}{3}\right).$$

Megjegyzés: 1. A harmadolópontok meghatározásával analóg módon a szakaszt bármely arányban osztó pont koordinátái meghatározhatók.

2. A harmadolópont koordinátáit a szakasz végpontjaiba mutató helyvektorok súlyozott számtani közepeként kapjuk meg.

A háromszög súlypontjának koordinátái

A síkidomok, így a háromszög súlypontjának meghatározása tervezői szempontból fontos statikai feladat. A fizikában és kapcsolódó tudományaiban (például a térinformatikában) a testeket általában a súlypontjukkal helyettesítik. A koordinátageometriában egyszerű összefüggést találunk a háromszög csúcsainak és súlypontjának koordinátái között.

A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepei.

$A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ $\Rightarrow$ $S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

Megjegyzés: Az összefüggés levezetésének egyik módszere a súlypontba mutató helyvektor felírása a csúcsokba mutató helyvektorok segítségével. Egy másik módszer a súlyvonal ismeretlen végpontját a felezőpont képletével írja fel és azt használja ki, hogy a súlypont a súlyvonal csúcshoz közelebbi harmadoló pontja. A levezetés az emelt szintű érettségi anyaga, ezért ezen a helyen nem foglalkozunk vele.

Feladatok

42. Határozd meg a következő, A és B végpontjaikkal megadott szakaszok harmadoló pontjait! a) $A(–4; –1)$, $B(5; 2)$; b) $A(–3; 3)$, $B(3, –1)$

Megoldás: a) $(–1; 0)$ és $(2; 1)$; b) $\left(1; \frac{1}{3}\right)$ és $\left(-1; \frac{5}{3}\right)$.

43. Határozd meg a szakasz ismeretlen végpontjának koordinátáit, ha egyik végpontja A és egyik harmadoló pontja H! a) $A(4; 0)$, $H(1; 1)$; b) $A(6; –2)$, $H(3;0)$.

Megoldás: Két ilyen szakasz lehetséges. a) $(–5; 3)$ és $(-0,5; 1,5)$; b) $(–3; 4)$ és $(1,5; 1)$.

44. Határozd meg a szakasz összes negyedelő pontját, ha végpontjai $A(0; –1)$ és $B(3; 5)$!

Megoldás:

A feladat megoldható a negyedelő osztópontokra vonatkozó képletek segítségével $\left(\frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}}{4}, \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \frac{\mathbf{a}+3\mathbf{b}}{4}\right)$, vagy az $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,illetve kétszeresének, háromszorosának *A*-ból való meghatározásával. Eredmények: $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; 2\right), \left(\frac{9}{4}; \frac{7}{2}\right)$.

45. Határozd meg az *ABC* háromszög súlypontjának koordinátáit! A megoldást szerkesztéssel ellenőrizd!

a) $A(-5; 2)$, $B(5; 8)$, $C(9; -4)$; b) $A(-2; -2)$, $B(-2; 3)$, $C(5; 3)$.

Megoldás: a) (3; 2); b) $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

46. Forgasd el az *ABC* háromszöget a súlypontja körül 90°-kal, az óramutató járásával ellentétes irányba! Melyek az új háromszög csúcsainak koordinátái, ha az eredeti háromszög csúcsainak koordinátái: $A(7; 2)$, $B(-3; -3)$, $C(5; 4)$.

Megoldás: $A'(2; 5)$, $B'(7; -5)$, $C'(0; 3)$.

47. Adott egy háromszög két csúcsa és súlypontja. Határozd meg a harmadik csúcs koordinátáit! a) $A(5; -7)$, $B(2; 4)$, $S(4; -2)$; b) $A(5; 6)$, $B(1; -4)$, $S(-2; 3)$.

Megoldás: a) (5; –3); b) (–12; 7).

48. Adottak az *ABC* háromszög csúcsai: $A(0; 5)$, $B(7; 2)$, $C(-5; -3)$. Határozd meg az *A* csúcsból induló súlyvonal hosszát!

Megoldás: $\sqrt{31{,}25} \approx 5{,}6$ egység.

5.2 triminó

Módszertani megjegyzés: Csoportmunkában használjuk az ***5.2 triminót***. A háromszögeket az azonos felezőpontot tartalmazó élek összeillesztésével kell kirakni. Az értékelés alapja a helyes kirakás sebessége.

Kislexikon

Lineáris kombináció: Ha a koordináta-rendszerben egy vektort az **i** és a **j** egységvektorok segítségével bontunk fel, akkor megkapjuk a vektor **lineáris kombinációját**, a $\mathbf{v} = v_1 \cdot \mathbf{i} + v_2 \cdot \mathbf{j}$ alakú felírást. v_1 és v_2 számokat, vagyis **i** és **j** vektorok szorzóit a **v** vektor koordinátáinak nevezzük: $\mathbf{v}\ (v_1;\ v_2)$.

Vektor koordinátái: Ha adott a vektor kezdőpontja A $(a_1;\ a_2)$ és végpontja B $(b_1;\ b_2)$, akkor az A kezdőpontból a B végpontba mutató **vektor** koordinátáit úgy kapjuk, hogy a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

$$A\ (a_1;\ a_2),\ B\ (b_1;\ b_2) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}\ (b_1 - a_1;\ b_2 - a_2)$$

Két pont távolsága: A kezdőpontjával és végpontjával megadott vektor hosszát a megfelelő koordináták különbségéből számítjuk ki ugyanúgy, mint a **két pont távolságát**:

$$A\ (a_1;\ a_2),\ B\ (b_1;\ b_2) \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Vektor hossza: A koordinátáival megadott **vektor hosszát** a koordináták négyzetösszegének négyzetgyöke adja:

$$\mathbf{a}\ (a_1;\ a_2) \quad \Rightarrow \quad |\,\mathbf{a}\,| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$$

Két vektor összeadásakor a megfelelő koordináták összeadódnak.

$$\mathbf{a}\ (a_1;\ a_2),\ \mathbf{b}\ (b_1;\ b_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} + \mathbf{b}\ (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$$

Két vektor kivonásakor a megfelelő koordinátákat kivonjuk egymásból.

$$\mathbf{a}\ (a_1;\ a_2),\ \mathbf{b}\ (b_1;\ b_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} - \mathbf{b}\ (a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)$$

Vektor szorzása számmal: Ha egy **vektort megszorzunk egy *k* számmal**, akkor a vektor koordinátái is *k*-val szorzódnak.

$$\mathbf{a}\ (a_1;\ a_2),\ k \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad k \cdot \mathbf{a}\ (k \cdot a_1;\ k \cdot a_2)$$

Vektor elforgatása 90°-kal: Ha **egy vektort 90°-kal elforgatunk**, akkor a koordinátái felcserélődnek, és az egyik
(de csak az egyik!) előjelet vált.

$$\mathbf{a}\,(a_1;\, a_2) \xrightarrow{90°} (a_2;\, -a_1) \text{ és } (-a_2;\, a_1)$$

+90°-os forgatásnál $(-a_2;\, a_1)$, –90°-os forgatásnál $(a_2;\, -a_1)$ vektort kapunk.

Vektor végpontjának koordinátái: Ha adott a vektor és a kezdőpontja, akkor a **végpont koordinátáit** úgy kapjuk, hogy összeadjuk a vektor és a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

$$A\,(a_1;\, a_2),\ \overrightarrow{AB}\,(x;\, y) \quad \Rightarrow \quad B\,(a_1 + x;\, a_2 + y)$$

$$\begin{array}{l} A\,(a_1;\, a_2) \\ \overrightarrow{AB}\,(x;\, y) \\ \hline B\,(a_1 + x;\, a_2 + y) \end{array}$$

Vektorok skaláris szorzata: Az **a** és **b** vektorok skalárszorzata: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,| \cdot |\,\mathbf{a}\,| \cdot \cos\alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szög (hajlásszögük).

Egy vektor önmagával való skaláris szorzata a vektor hosszának a **négyzetével** egyenlő:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}\,.$$

A vektorok skaláris szorzásának művelete kommutatív művelet: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, és teljesül a disztributivitás: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

A koordináta-rendszer bázisvektoraira érvényes összefüggések: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$, és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$.

Vektorok skaláris szorzata vektorkoordinátákkal kifejezve: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,| \cdot |\,\mathbf{b}\,| \cdot \cos\alpha = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2\,.$$

Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzat értéke nulla: $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$.

Felezőpont koordinátái: Adott a szakasz két végpontja. Ekkor a **felezőpont koordinátáit** úgy kapjuk, hogy a végpontok megfelelő koordinátáinak összegét 2-vel osztjuk.

$$A(a_1;\, a_2),\ B(b_1;\, b_2) \quad \Rightarrow \quad F\left(\frac{a_1 + b_1}{2};\frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Harmadolópont koordinátái: Az *A* és *B* végpontú szakaszok **harmadolópontjainak** koordinátái:

$$A(a_1;\, a_2),\ B(b_1;\, b_2) \quad \Rightarrow \quad H_1\left(\frac{2a_1+b_1}{3};\frac{2a_2+b_2}{3}\right) \text{ és } H_2\left(\frac{a_1+2b_1}{3};\frac{a_2+2b_2}{3}\right).$$

Súlypont koordinátái: A **háromszög súlypontjának** koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepei.

$$A(a_1;\, a_2),\ B(b_1;\, b_2),\ C(c_1;\, c_2) \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$