Kombinatorika – kidolgozott típuspéldák

1.) Hány 5 jegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek egyszeri felhasználásával?
Az első helyre bármelyik számot választhatom az 5 közül, a második helyre a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból választhatok stb., így összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ szám készíthető.

2.) Hány 3 jegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek egyszeri felhasználásával?
Az első helyre bármelyik számot választhatom az 5 közül, a második helyre a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból választhatok, azaz összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ szám készíthető.

3.) Hány 3 jegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha mindegyiket többször is felhasználhatom?
Mindhárom helyre bármelyik számjegy kerülhet, így összesen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ szám készíthető.

4.) Hány 4 jegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek egyszeri felhasználásával?
Az első helyre 4 számjegyből választhatok (0 nem állhat az első helyen), a második helyre a maradék 4-ből bármelyik kerülhet (itt már lehet 0 is!), a harmadikra a maradék 3-ból bármelyik stb., azaz összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ szám készíthető.

5.) Hány 4 jegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha mindegyiket többször is felhasználhatom?
Az első helyre 4 számjegyből választhatok (0 nem állhat az első helyen), a második helyre bármelyik kerülhet (itt már lehet 0), a harmadikra szintén bármelyik stb., azaz összesen $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ szám készíthető.

6.) A színházba egy 5 fős barátitársaság jegyei egymás mellé szólnak. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha András és Bori mindenképpen egymás mellett szeretne ülni?
Ha két ember mindenképpen egymás mellett szeretne ülni, akkor tekintsük őket 1 embernek. Így csak 4 embert kell sorba rendezni az összes lehetséges módon, ez $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sorrend. Csakhogy a 2 egymás mellett ülő ember fordított sorrendben is ülhet, így $2 \cdot 24 = 48$ a végeredmény.

7.) Egy 10 tagú társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás történik?
1. megoldás: Az első ember 9 másikkal fog kezet, a második 8 emberrel (az elsővel való kézfogását az első embernél már beszámítottuk), a harmadik 7 emberrel stb., azaz összesen $9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$ kézfogás történik.
2. megoldás: Minden ember 9 másikkal fog kezet, ez összesen $9 \cdot 10 = 90$. Így azonban minden kézfogást duplán számolunk (mindkét "kézfogónál" beleszámítjuk), tehát kettővel el kell osztani, azaz összesen $90/2 = 45$ kézfogás történik.
3. megoldás: Annyi kézfogás történik, ahányféleképpen kiválaszthatunk 2 embert a 10-ből, azaz "10 alatt a 2" = = $10!/(2! \cdot 8!) = 45$

8.) Egy 12 csapatos labdarúgótornán hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón?
Az első helyre a 12 csapatból bármelyik kerülhet, a második helyre a maradék 11-ből, a harmadikra a maradék 10-ből választhatunk, azaz összesen $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$-féle sorrend lehetséges.

9.) Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 4-féle festékünk van? (Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)
Mind az 5 házhoz használhatjuk bármelyiket a 4-féle festék közül, azaz összesen $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ lehetőség van.

10.) Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 7-féle festékünk van, és minden háznak különböző színűnek kell lenni? (Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)
Az első házhoz 7-féle festékből választhatunk, a másodikhoz a maradék 6-ból, a harmadikhoz a maradék 5-ből stb., azaz összesen $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ lehetőség van.

11.) Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 4-féle festékünk van, és a szomszédos házak nem lehetnek egyforma színűek?
Az első házhoz 4-féle festékből választhatunk, a másodikhoz a maradék 3-ből, a harmadikhoz szintén 3-ból (a második ház színét nem választhatjuk, de az elsőét igen), az összes továbbihoz is 3 színből, azaz összesen $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

324 lehetőség van.

12.) Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, egy zöld, egy kék, egy piros és egy sárga golyót?
Az első helyre 5 színből választhatunk, a másodikra a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ből stb., azaz ös--szesen 5·4·3·2·1 = 120 lehetőség van.

13.) Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, két zöld és három kék golyót?
Ha mind a 6 golyó különböző színű lenne, akkor 6·5·4·3·2·1 = 720 lehetőségünk volna. A két zöld golyót 2·1 = 2, a három kéket pedig 3·2·1 = 6-féleképpen lehet sorba rakni. Mivel az azonos színűeket egyformának tekintjük, az egymás közötti sorrendjeiket nem különböztetjük meg, tehát a 720 lehetőséget 2-vel, ill. 6-tal el kell osztani, azaz összesen 720/(2·6) = 60 lehetőség van.

14.) Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha minden könyv különböző, és mindenki csak egy könyvet kaphat?
Az első könyvet a 10 ember közül bárkinek adhatjuk, a második könyvet a maradék 9, a harmadikat a maradék 8 közül bármelyiknek stb., azaz összesen 10·9·8·7 = 5040 lehetőség van.

15.) Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha a könyvek egyformák, és mindenki csak egy könyvet kaphat?
A kérdés az, hogy hányféleképpen választhatjuk ki a 10 ember közül azt a négyet, aki könyvet kap (mivel a könyvek egyformák, a kiválasztás sorrendje nem számít). Összesen "10 alatt a 4" = 10!/(4!·6!) = 210 lehetőség van.

16.) Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha minden könyv különböző, és mindenki több könyvet is kaphat?
Mind a 4 könyvet kaphatja a 10 közül bármelyik ember, azaz összesen 10·10·10·10 = 10000 lehetőség van.

17.) Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha a könyvek egyformák, és mindenki több könyvet is kaphat?
Vegyük sorra az összes lehetőséget!
- Ha mind a 4 könyvet ugyanaz az ember kapja, akkor 10-féleképpen oszthatjuk ki.
- Ha egy ember kap 3 könyvet, egy másik pedig 1-et, akkor 90-féleképpen oszthatjuk ki: a 3- könyvest 10, az 1-könyvest pedig a maradék 9 emberből választhatjuk ki, azaz összesen 10·9 = 90 lehetőség van.
- Ha 2 ember kap 2-2 könyvet, akkor 45-féleképpen oszthatjuk ki. "10 alatt a 2" = 10!/(2!·8!) = 45- féleképpen választhatjuk a 10-ből azt a 2 embert, aki könyvet kap.
- Ha 4 ember kap 1-1 könyvet, akkor 210 lehetőség van. "10 alatt a 4" = 10!/(4!·6!) = 210-féleképpen választhatjuk ki a 10-ből azt a 4 embert, aki könyvet kap.
- Ha egy ember kap 2 könyvet, 2 pedig 1-1 könyvet, akkor 360 lehetőségünk van: a 2-könyvest 10 emberből választhatjuk ki, a két 1-könyvest pedig a maradék 9-ből ("9 alatt a 2" = 9!/(2!·7!) =) 36-féleképpen, azaz összesen 10·36 = 360-féleképpen választhatjuk ki a 3 emberünket.

Összesen tehát 10+90+45+210+360 = 715 lehetőség van.

18.) Hányféleképpen olvasható ki az alábbi ábrából a BUDAPEST szó?

B	U	D	A
U	D	A	P
D	A	P	E
A	P	E	S
P	E	S	T

Az olvasás során 3-szor lépünk jobbra és 4-szer lefelé. Az összesen 7 lépésből tetszőlegesen kiválaszthatjuk a 4 lefelé lépést, ehhez pontosan egy jó olvasás fog tartozni és viszont. A lehetőségek száma ezért $\binom{7}{4} = 35$.

Az eredeti doksi:
https://www.szig.hu/_user/browser/File/Bal%20oldali%20men%C5%B1kh%C3%B6z%20tartoz%C3%B3%20f%C3%A1jlok/tantargyak/matematika/kombinatorika1-2.pdf