

Exponenciális, logaritmusos szöveges feladatok

- 1.) A radioaktív anyagok bomlását az $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi tömeg, m_0 a kezdeti tömeg, t az eltelt idő, T pedig az adott anyag ún. felezési ideje.
- a) Hányadrésze van meg egy kőzetben az időszámításunk kezdetén még meglévő radioaktív tóriumizotópoknak? A tórium felezési ideje 80 ezer év. (~98,26%)
- b) Egy óra alatt hányadrészére csökken a 19,7 perc felezési idejű radioaktív bizmutizotóp tömege? (~12,11%)
- 2.) Tudjuk, hogy a légnyomás felfelé haladva exponenciálisan csökken, vagyis h (méter) magasságban:
 $p(h) = p_0 \cdot 2^{-c \cdot h}$, ahol $p_0 \approx 100\,000 \text{ Pa}$ (kb. ennyi a légnyomás a Föld felszínén).
Tudjuk még azt is, hogy kb. 5500 méter magasan a légnyomás fele ennyi, mint a Föld felszínén.
- a) Mennyi a c állandó értéke? ($c = \frac{1}{5500} \approx 1,81 \cdot 10^{-4}$)
- b) Mennyi a légnyomás a Himalája tetején (kb. 8800 méter)? (~303 143 Pa)
- 3.) A csillagászok az égitestek fényességét magnitúdóban mérik. Az ókori görögök a legfényesebb csillagokat elsőrendűnek, a szabadszemmel még éppen láthatókat pedig hatodrendűnek nevezték. Tehát a kisebb szám jelezte a fényesebb csillagokat. Ez a skála logaritmusos, azaz minden egész magnitúdó-változás (különbség) ugyanannyiszoros eltérést (hányadost) jelent. Öt magnitúdó-változás 100-szoros fényerősség változást jelent.
- a) Hányszoros fényerőváltozás jelent 1 magnitúdó-változást? ($\sqrt[5]{100} = 100^{\frac{1}{5}} \approx 2,5119$)
Minden egész magnitúdó-változás ugyanannyiszoros eltérést jelent. Vagyis: 5-ször ugyanannyiszoros változás $\rightarrow x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$
Ez egyenlő 100-zal, azaz: $x^5 = 100$ Ebből az $x = \sqrt[5]{100}$
- b) A Nap magnitúdója $-26,7$. A Hold magnitúdója (teleholdkor) $-12,7$. Hányszor fényesebb a Nap a Holdnál? (kb. 398 110-szer)
Az 1 magnitúdó-változás kb. 2,5119-szeres változást jelent. (Lásd az a) feladatrészt!)
A 14 magnitúdó-változás $2,5119^{14}$ -szeres változást jelent. ($14 = 26,7 - 12,7$)
- 4.) Ha nagyobb mennyiségű vízben oldunk fel kisebb mennyiségű vizet, akkor az oldódás közelítőleg az $M(t) = M_0 \cdot a^t$ formula szerint, vagyis időben exponenciálisan történik. Ebben a képletben:
 $0 < a < 1$
 $M(t)$: A t időpontig még fel nem oldódott cukor mennyisége.
 M_0 : A vízbe tett cukor mennyisége.
 t : A cukor vízbe kerülésétől mért időt jelenti, percben megadva.
Az a értéke legyen 0,95!
- a) Mennyi idő múlva oldódik fel a cukor fele? (~13 és fél perc)
- b) Ha a 99,9%-os oldódást már teljes oldódásnak tekintjük, akkor mikorra oldódik fel a cukor? (134,67 perc, vagyis kb. 2 és egy negyed óra)
- 5.) A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4,42 + \frac{2}{3} \cdot \lg E$
 M : A földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter- skálán.
 E : A földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve).

a) A Nagasakira ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (1945. május 9.) (kb. 5-ös erősségű)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt. Mekkora volt a felszabadult energia? ($10^{20,58} \text{ J} \approx 3,80 \cdot 10^{20} \text{ J}$)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (kb. 1000-szer)

6.) Egy fénymásológép 1400 €-ba kerül. A gép értéke egy év alatt 15%-kal csökken. Amikor a gép értéke 400 €-nál kevesebb lesz, egy nagyobb hiba javítása már nem gazdaságos. Hány év múlva mondhatjuk azt, hogy ha a fénymásoló elromlik, akkor célszerű már újat vásárolni? (kb. 7,7 év, azaz olyan 8 év múlva)

7.) A hang sugárzásának mérésére a gyakorlatban egy könnyen alkalmazható mértékegységet, a decibelt (dB) használják. Az átszámítás módja a következő:

$$E = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right), \text{ ahol}$$

E: Az egyén által érzékelt szubjektív hangerősség decibelben.

I: A hangintenzitás (vagyis az 1 m²-en átáramló hangenergia) dB-ben megadott értéke.

I₀: Az átlagos emberi fül által érzékelhető legkisebb intenzitás, amely $10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ -rel egyenlő.

a) Az alig hallható suttogás objektív hangerőssége I₀ = $10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, a hangszóróból áradó hangos zenéé pedig ennek 1 milliószorosa. Szubjektíve milyen erősségűnek érzik az emberek ezeknek a hangforrásoknak hangját? (kb. 60-szorosnak)

b) Az 1 kHz-es hangmagasságon süvítő repülőgép motorjának hangossága 3 méterről kb. 130 decibel. Hányszorosa a motorzaj objektív hangerőssége a halk suttogásénak? (10^{13})

Hangforrás	Hangszint (dB)	Hangintenzitás (W/m ²)
Hallásküszöb	0	10 ⁻¹²
Normál légzés	10	10 ⁻¹¹
Szellőben susogó falevelek	20	10 ⁻¹⁰
Mozi üres nézőtere	30	10 ⁻⁹
Lakónegyedbeli környék éjszaka	40	10 ⁻⁸
Csendes vendéglő	50	10 ⁻⁷
Beszélgetés	60	10 ⁻⁶
Zsúfolt forgalom	70	10 ⁻⁵
Porszívó	80	10 ⁻⁴
Vízésés robaja	90	10 ⁻³
Metró zaja	100	10 ⁻²
Légcsavaros repülőgép felszálláskor	120	1
Gépfegyver zaja közlelről	130	10
Sugárhajtású repülőgép felszálláskor	140	10 ²
Szélcsatorna / Fájdalomküszöb	160	10 ⁴

A hangerősség mérésére a decibelskálát használják. 1000 Hz frekvencián a 10^{-12} W/m^2 -es intenzitású hangot 0 decibelesnek tekintik, és ezt hívják hallásküszöbnek. Tízszor ekkora hangintenzitás 10 dB-lel nagyobb, százszor ekkora hangintenzitás 20 dB-lel nagyobb, ezerszeres intenzitás 30 dB-lel nagyobb hangerőt jelent a decibelskálán. Ha a hangintenzitást megduplázzák, akkor az hozzávetőlegesen +3 dB-es hangerő-növekedést eredményez. A decibelskálát azért vezették be, mert ez jól fejezi ki az erősebb hangok okozta hangingerület mértékét. A 130 dB-nél erősebb hangok már fájdalmat okoznak a fülben. Az erős hangok halláskárosodáshoz vezethetnek.

