

Kombinatorika feladatok megoldással

1. Harminc ember között 4 nyereményt sorsolnak ki.

a) Hányféleképpen végződhet a sorsolás, ha a 4 nyeremény tökegyforma és mindenki csak egyszer nyerhet?

$$\binom{30}{4} = \frac{30!}{4! \cdot 26!} = 27.405$$

b) Hány végeredmény lehet, ha 4 **különböző** nyereményt sorsolnak ki és mindenki egyszer nyerhet?

$$30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657.720$$

c) És ha mindenki többször is nyerhet? $30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 = 810.000$

2. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány háromjegyű szám készíthető, ha

a) a számjegyek nem ismétlődhetnek. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) a számjegyek ismétlődhetnek? $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3.125$

3. Egy pékséghez a nyitáskor 5 ember érkezik, de egyszerre csak 3 ember mehet be. Hányféleképpen választhatjuk ki az első vásárlókat? $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

4. 26 ember közül egy 3 fős bizottságot választanak, ahol van elnök, alelnök és titkár. Hányféleképpen tehető ez meg? $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15.600$

5. Az 1, 2, 5, 6, 7 számjegyekből hány négyjegyű páros szám készíthető? $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 250$

6. Egy dobókockával 4-szer dobunk egymás után. Hány dobássorozat lehetséges? $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$

7. Az E, E, K, M, M, M betűkből hány 6 betűs karaktersorozat készíthető? $\frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$

8. Egy könyvtárban hat könyvet szemelünk ki, de csak hármat lehet kikölcsönözni közülük. Hányféleképpen választható ki a három könyv? $\binom{6}{3} = 20$

9. Huszonhárom emberből egy 4 tagú bizottságot választunk, ahol mindenkinek ugyanaz a rangja. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? $\binom{23}{4} = 8.855$

10. Egy könyvespolcon 8 különböző matekkönyv van. 😊 Hányféleképpen tehetjük őket egymás mellé, ha a Legjobb EKLG-s Matekfeladatok Gyűjteménye három kötetét mindenképpen egymás mellé szeretnénk helyezni? $3! \cdot 6! = 6 \cdot 720 = 4.320$

11. Egy úszóversenyen 18-an indulnak. Hányféleképpen alakulhat a dobogósok sorrendje?

$$18 \cdot 17 \cdot 16 = 4.896$$

12. Egy számozásos lakat 4 egymás mögötti fogaskerek megfelelő beállításakor nyitható ki. A fogaskerek 10 számjegyet tartalmaznak. Ha valaki nem ismeri a megfelelő számkombinációt, mennyi időt vesz igénybe, amíg **biztosan** ki tudja nyitni a lakatot, ha egy beállítás 8 másodpercig tart?

$$10^4 \cdot 8 \text{ mp} = 80.000 \text{ sec} \approx 22,2 \text{ óra} \approx 2 \text{ óra } 12 \text{ perc}$$

13. Hány olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei különbözők? $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27.216$

14. A KOMBINATORIKA szónak hány permutációja van? (Vagyis hányféleképpen rakhatjuk sorba a szó betűit?)

$$\frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 389.188.800$$

15. Hányféleképpen olvasható ki az alábbi ábrából az OSZTÁLY szó, ha mindig a bal felső sarokból kell indulnunk, és minden lépésünk csak jobbra vagy lefelé történhet?

O S Z T Á L Y
S Z T Á L Y
Z T Á L Y
T Á L Y
Á L Y
L Y
Y

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$$

vagy

Az OSZTÁLY szó esetében az O, S, Z, T, Á, L betűk bármelyikén állva 2-felé léphetünk tovább (jobbra vagy lefelé), így a lehetséges lépéssorozatok száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

16. Hányféleképpen olvasható ki az alábbi ábrából a NYÍREGYHÁZA szó, ha minden lépésünk csak jobbra vagy lefelé történhet?

N	Y	Í	R	E	G	Y
Y	Í	R	E	G	Y	H
Í	R	E	G	Y	H	Á
R	E	G	Y	H	Á	Z
E	G	Y	H	Á	Z	A

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210

Minden lehetséges kiolvasási útvonalon összesen 6-szor lépünk jobbra, és 4-szer lefelé. Ez megfordítva is igaz: ha 6 jobbra és 4 lefelé lépést tetszőlegesen sorrendben egymás után írunk, akkor biztosan egy-egy jó kiolvasást kapunk. Elegendő tehát a 6 jobbra és 4 lefelé lépésből álló sorozatok számát meghatározni. Ha a jobbra lépést J-vel, a lefelé lépést L-lel jelöljük, a feladatunk a 6 db J és 4 db L betűből alkotható „szavak” számának meghatározása. Ez pedig az ismétléses permutáció képletével:

$$\frac{10!}{6! \cdot 4!} = \binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$$

17. Hányféleképpen olvasható ki az alábbi ábrából a DIGITÁLIS KULTÚRA szó (szóköz nélkül!), ha minden lépésünk csak jobbra vagy lefelé történhet?

D	I	G	I	T	Á			
I	G	I	T	Á	L			
G	I	T	Á	L	I			
I	T	Á	L	I	S			
			K	U	L	T	Ú	
			K	U	L	T	Ú	R
			U	L	T	Ú	R	A

1	1	1	1	1	1					
1	2	3	4	5	6					
1	3	6	10	15	21					
1	4	10	20	35	56	56	56	56	56	
					56	112	168	224	280	336
					56	168	336	560	840	1176

A DIGITÁLISKULTÚRA (így egybeírva – bocsánat érte!) S betűjén mindenképpen áthaladunk. Ez a betű két részre osztja az útvonalat. E két részben a lehetőségek számát először külön-külön határozzuk meg. A DIGITÁLIS szó kiolvasásához 5 jobbra és 3 lefelé történő mozgásra van szükség. Ezt $\binom{8}{5} = 56$ -féleképpen kivitelezhetjük. Ekkor jutunk el az S betűhöz, ahonnan még 5 jobbra és 2 lefelé történő elmozdulásra van szükség. Ez $\binom{7}{2} = 21$ lehetőség. Tehát összesen $56 \cdot 21 = 1176$ módon juthatunk el a D betűtől az A betűig.

18. Egy csomag magyar kártyából húzzunk ki találmra 8 lapot. Hány esetben lehet a kihúzott lapok között 1 ász?

A kihúzott lapok sorrendje nem számít. A 4 ászból egyet $\binom{4}{1} = 4$ -féleképpen választhatunk ki. Kell még 7 nem ász. A 28 nem ászból hetet $\binom{28}{7} = 1184040$ -féleképpen választhatunk. Bármelyik ászt akármelyik hét nem ásszal összepárosíthatjuk, ezért az összes lehetőségek számát az előbbi értékek a szorzata adja. Vagyis $4 \cdot 1184040 = 4.736.160$ eset lehetséges.